ELEMENTI
DI
FISICA MATEMATICA

A SUA ALTEZZA REALE

FERDINANDO III.

ARCIDUCA D' AUSTRIA

PRINCIPE REALE D' UNGHERIA E DI BOEMIA

GRANDUCA DI TOSCANA ec. ec. ec.

COMPILATI DA
STANISLAO CANOVAI E GAETANO DEL-RICCO
DELLE SCUOLE PIE

FIRENZE MDCCXCIX.
Presso Pietro Allegrini Stampatore alla Croce Rossa
Con Approvazione.

Xenocrates ad eum qui Rerum Mathematicarum ignarus ludum suum frequentare cupiebat, Abi, *inquit*, ansis enim et adminiculis Philosophiae cares.
Diog. Laert. in Xen. L. IV. 10.

ALTEZZA REALE

NEL giubbilo inesprimibile di tutti i fedeli Sudditi di V. A. R., che per un prodigio evidente del Cielo e per la forza invitta delle gloriose Armi Imperiali tornano all' età dell' oro e della virtù dopo aver provata per qualche mese quella del delitto e del ferro, noi ci affrettiamo ad attestare la nostra estrema gioja con quel migliore argomento che può permetterci la nostra tenuità.

Ed è vero per altra parte che quest' Opera già da gran tempo consacrata ai RR. Figli dell' Augusto LEOPOLDO apparteneva esclusivamente ad Essi per quanto se ne ripetessero l' Edizioni: ma dal momento in cui per somma felicità della Toscana fu dall' A. V. R. riempiuto con generale allegrezza il primitivo Soglio Paterno, crebbero i Suoi particolari diritti sopra il nostro debol lavoro. Tante sono le beneficenze dalla generosa Sua Mano sparse sopra di noi, tanto il trasporto del Suo Spirito penetrante per gli Studj utili insieme e sublimi, e tante le riprove del Suo magnanimo Cuore, ammirate dal Pubblico nei tempi i più difficili e nelle vicende le più calamitose della Toscana, che solo a V. A. R. conveniva umiliare il nostro Libro in argomento di eterna riconoscenza, di esultazione e di omaggio.

Così piaccia alla Reale Clemenza Vostra di non sdegnare la sproporzione dell' une e dell' altro, mentre sospirando l' avventuroso momento che renda ai leali Suoi Sudditi e Figli il lor Sovrano ed il loro Padre, colla più sincera obbedienza ci protestiamo

Dell' A. V. R.

Dev.mi Obb.mi Fed.mi Servi è Sudditi
Stanislao Canovai e Gaetano Del-Ricco delle Scuole Pie.

DISCORSO PRELIMINARE

CON questi Elementi di Fisica Matematica (tenue lavoro in un secolo sì fecondo di Matematica, di Fisica e d' Elementi) restò finalmente adempiuto fino dall' anno 1788 l' impegno da noi già contratto nel 1781, e vennero abbondantemente applicate alla Pratica l' eccellenti Lezioni Elementari dell' Ab. MARIE. Alcune delle cagioni che ne produssero allora il ritardo e che fecero forse stupire dell' intervallo alquanto lungo tra la promessa e l' esecuzione, meritano anche in questa ristampa d' esser partecipate alli Studiosi.

Sotto il nome di pratiche Applicazioni di Matematica si era intesa fin quì da tutti gli Scrittori Elementari o la dottrina e gli usi dello Stuccio Geometrico, o una raccolta di Problemi or Meccanici, ora Idraulici, ora Ottici ed ora Astronomici, la cui soluzione dipendesse in qualche modo dai varj risultati o della Geometrìa o dell' Analisi. Dobbiamo confessare che l' altrui esempio ci avea sedotti in principio: tutte le nostre idee si rivolsero alla Squadra, al Compasso di proporzione, al Semicircolo, alla Scala e a quanto può esservi di più utile e di più elegante nell' Agrimensura, nello Stereometrìa, nella Livellazione, nella Gnomonica e in tutto il vasto campo della Fisica Matematica. Ma quanto disordine in questo disegno! L' impossibilità di dare ai Principianti le giuste nozioni or di questa Scienza or di quella, il salto irregolare dall' una all' altra secondo la varia indole dei teoremi, e soprattutto la necessità di richiamare spessissimo i fondamenti o dell' Astronomìa o dell' Ottica o della Meccanica senza poterne dimostrar sul fatto uno solo, ci fecero infine avvertire che in luogo d' una fabbrica solida e vantaggiosa, andavasi ad inalzare una mole informe di sparsi avanzi e di rottami, più sconnessa ancora e più mancante d' un volgar Dizionario, e capace piuttosto di abituare i Giovani all' idee superficiali e all' impostura, che di ispirar loro una virtuosa passione per la profonda e verace dottrina.

Abbandonammo pertanto l' inutil fatica, e dopo qualche incertezza risolvemmo di scrivere un Corso regolato di Fisica: ma se nel formare il piano d' un Corso qualunque si è mai dovuta mettere a calcolo la scelta delle materie, in un Corso di Fisica non si potrebbe certamente dispensarsene senza follìa. La Fisica, quest' albero immenso che stendendo i suoi rami dall' uno all' altro limite dell' Universo, vegeta giornalmente in proporzione della sua sterminata grandezza, e con la varietà prodigiosa dei fiori, delle frondi e dei frutti chiaramente palesa la forza insieme e la debolezza dello spirito umano che lo alimenta, la Fisica non lascia chiudersi in quattro pagine, e chiunque intraprende senza scelta a trattarla, si espone al rischio di pubblicar molti Volumi e pochissime cognizioni. Dato dunque per una parte l' infinito numero degli oggetti che la Fisica abbraccia, e supposto per l' altra il corto giro di alcuni mesi che nelle Pubbliche Scuole suol destinarsi a questo Studio, si sentirà ben presto l' impossibilità di parlar degnamente dell' intera Scienza e l' evidente bisogno di sacrificare alla sua più

nobil porzione il vasto ammasso di ciò che resta.

Ma la sua più nobil porzione qual' è? son forse quelle metafisiche sottigliezze che per dar di tutto ragione stabiliscono dei principj che la sana ragione non può comprendere, o sono quelle ipotesi capricciose che a somiglianza di certi insetti, nascono e muojono nel giorno stesso? Pensi ognuno a suo gusto: ma noi crediamo che il privato gusto d' un Maestro debba cedere all' interesse pubblico degli Scolari, e che il loro interesse consista non in applicarsi a dei vani trastulli d' ingegno e di fantasìa cui debban rinunziar quanto prima con pentimento e vergogna, ma in farsi un ricco fondo di cognizioni che il buon senso trovi sempre bastantemente esatte e che la moda non possa mai tacciar di ridicole e d' antiquate. Perciò la porzione più nobile della Fisica è per noi quella sola che portando impresso più chiaramente dell' altre il prezioso carattere di verità, men dell' altre è soggetta all' eterna vertigine dell' opinioni.

Or tale fu riconosciuta in tutti i tempi la Fisica Istorica e la Fisica Matematica: poichè laddove o caddero nell' oblìo o sono interamente perite le sottili speculazioni e le poetiche stravaganze di tanti Filosofi che pur non mancarono d' ammiratori e di seguaci, si tengono all' incontro in alto pregio e si consultan tuttora avidamente le Storie Naturali d' Aristotele, di Teofrasto e di Plinio, nè cessano di comparirci stupende le scoperte meccaniche d' Archimede, l' invenzioni idrauliche di Ctesibio, le misure astronomiche e geografiche d' Eratostene, e l' ottiche osservazioni di Tolomeo. Non già che in queste parti ancora non possa talvolta insinuarsi l' errore e quindi aprirsi l'adito al cangiamento: ma prescindendo da poche accidentalità di circostanze e di fatti, è ben raro il caso in cui dimandino un' essenzial riforma le teorìe, e in questo caso medesimo gli Storici e i Matematici son tanto avvezzi allo schietto linguaggio della natura e all' inviolabil rettitudine del raziocinio, che lungi dal dissimulare il difetto o sostituir con franchezza le lor chimere all' altrui, accennano con buona fede l' incertezza dei risultati ed aspettano in silenzio un miglior lume dall' imparzialità dell' osservazioni e dall' oracolo dell' esperienze.

Potrebbe opporsi per avventura che la Fisica Istorica è troppo vasta, e la Fisica Matematica è troppo laboriosa e sublime: ma ecco appunto il motivo per cui tralasciata la prima, ci determinammo infine alla seconda. Invano grideranno molti al paradosso: è la via difficile che ha bisogno di guida; e il condurre i Giovani con aria d' importanza per sentieri facili e deliziosi, è un fomentarne l' ordinaria lentezza, un estinguerne il genio e il talento, un affrettare il naufragio de' buoni Studj e dell' Arti tutte che ne dipendono. Infatti vi è forse uno solo di questi Giovani che dal piacevol commercio coi Vegetabili e coi Minerali, o dagli ameni esperimenti sulle Chimiche trasformazioni e sull' Arie, passi senza un estremo ribrezzo ai grandi ed immutabili fondamenti dell' umano sapere, e non perda affatto il coraggio alla vista di quelle Carte ove si conservano le dottrine immortali di Newton e d' Eulero? ma per l' opposto non ve ne è uno solo che dopo qualche assuefazione alle ruvidezze pretese della Fisica Matematica, non possa, se pur gli piace, abbassarsi fino all' Istorica, impadronirsene

da se medesimo in pochi istanti, e portarvi anche una nuova serie d' idee e un nuovo spirito di combinazione, soliti doni del calcolo e dell' analisi. Del resto chiunque ci vorrà dire che i Giovani sono per la maggior parte incapaci di studj così profondi, mostrerà di aver meditato ben poco sulle forze mirabili dello spirito e della macchina giovanile. Noi sapremmo farne la più completa e la più trionfante apologìa, e sarebbe forse di pubblica utilità lo svelare ad uno ad uno i veri motivi dell' esito sfortunato che molti narrano dei loro studj: ma senza perderci in digressioni, risponderemo per ora con l' esperienza non interrotta di quindici Corsi che i Giovani assolutamente incapaci giungono appena ai sei per cento.

La Fisica Matematica divenne dunque il nostro solo pensiero. Ma come adunar tanta messe in un piccol Volume? poichè tutti sanno che se questo ramo della Naturale Scienza fu debole e fiacco ne' suoi principj, e mancando talora o di nutrimento adattato o di proporzionata cultura minacciò perfino d' inaridirsi, vennero poi dei giorni sì belli per lui, che sviluppata in un subito la sua segreta energìa, eguagliò tutti gli altri in ampiezza, e gli superò di gran lunga nella solidità del tronco e nell' abbondanza dei frutti. Era perciò manifesta la necessità di distinguer la nostra Fisica in Elementare ed in Sublime, di riserbar quest' ultima a circostanze migliori, e di applicarci intanto alla chiara e metodica esposizion della prima. Fatto il disegno, si trattò d' eseguirlo: e come veggiamo due Artefici non solo travagliar diversamente ai varj pezzi d' una macchina, ma spesso anche riunirsi insieme per dar forma e perfezione a un pezzo stesso: così le differenti Parti dell' Opera crebbero tra le nostre mani con vicendevol consenso, di modo che la totalità del lavoro non è dovuta all' uno più che all' altro di noi.

Frattanto le Lezioni Elementari dell' Ab. Marie, bastantemente perfette riguardo al piano del loro celebre Autore, si trovarono in parte mancanti relativamente all'intenzione di farne la base di tutto il nostro edifizio. Convenne pensare a qualche aggiunta; ond' è che ripreso l' intero filo delle materie, ci impegnammo appoco appoco ad esaminarle minutamente, a toglierne il superfluo, a sostituirvi il necessario, a rischiararne l' oscuro e ad addolcirne il difficile. Si sciolse una quantità considerabile di problemi che nudamente proposti nelle Lezioni, servissero d' esercizio agli Studiosi e ci autorizzassero a richiamarne in Fisica i risultati: si dette una nuova forma alle ordinarie regole de' due Calcoli Differenziale ed Integrale, onde i Giovani potessero apprenderle fin dal prim' anno, e maneggiarle poi nel secondo all' ingresso medesimo del nostro Libro: si calcolarono alcune Tavole interessanti da porsi di seguito alle Lezioni, e si resé in tal guisa più facile e più spedito il passaggio da varie formule generali ai particolari casi e bisogni dell' Analisi e della Fisica: insomma riusciron sì numerosi i cangiamenti e l' aggiunte, che impiegato il giusto tempo a ridur tutto in sistema, sol nell' Aprile del 1786 potemmo intraprendere la seconda Edizione delle Lezioni Elementari, i cui numeri preceduti dalla lettera L. (*Lezioni*) furono perpetuamente citati nella prima Edizione di questi nostri Elementi.

E questi ancora dovean pubblicarsi unitamente alle Lezioni se un avvenimento inaspettato; la cui memoria sveglierà sempre in noi la gratitudine ed il dolore, non ci avesse obbligati ad un nuovo ritardo. Erano appena impresse le prime pagine delle Lezioni, quando le Scienze Matematiche dopo aver perduti in poco tempo un Eulero, un d' Alembert ed un Frisi, fecero la perdita non men deplorabile dell' Ab. Leonardo Ximenes. Questo nome è sì noto all' Europa, e sono sì divulgate le tante Opere ond' Egli accrebbe i tesori della Meccanica, dell' Idraulica e dell' Astronomia, che il volerne quì compendiare i meriti e la dottrina sarebbe piuttosto un oscurar la sua fama: basti dunque al nostro intento il soggiungere che non ebbe Egli il cuore men generoso e men sensibile dello spirito; che riguardando la Toscana come sua Patria, e grato alle pubbliche distinzioni e alle Regie beneficenze onde il lungo studio e la pratica consumata lo aveano fatto degno, consacrò morendo alla pubblica utilità le ricompense de' suoi sudori, ed istituì due Cattedre, l' una d' Astronomia e l' altra d' Idraulica, Scienze coltivate da Lui col più brillante successo; e che infine scelse noi i primi ad occupar quelle Cattedre, quasi presentisse i deboli ma sinceri ufizi che gli avremmo resi un giorno ne' suoi ultimi istanti, e volesse mostrarcene anticipato il gradimento con una sì pubblica e sì onorevole testimonianza.

Se questa destinazione impensata ad allevar degli Idraulici e degli Astronomi non ci trovò del tutto sprovvisti, ci costrinse almeno a gettare un' altra volta l' occhio sugli Elementi di Fisica: e per dar loro una forma più corrispondente alle nostre nuove incumbenze, stabilimmo di aumentare alquanto l' Astronomìa, e di serrar per l' opposto in confini assai più stretti l' Idraulica; l' uno e l' altro a ragione. Finchè si tratta d' istruir dei Giovani col solo fine di accostumargli alle discussioni profonde e al severo raziocinio delle Matematiche, niuno può giustamente dolersi se si trascuri qualche minuta ricerca, o si abbracci qualche teorìa non canonizzata per anche dall' esperienza e dall' uso: ma quando l' istruzione è principalmente diretta a formar dei Periti che il Pubblico possa all' occorrenze impiegar con fiducia e con vantaggio, non è più lecito ai Professori o di sopprimer le cose più necessarie o di far pompa di insolite e dubbie ipotesi. Perciò si dette un giro più ampio all' Astronomìa e la corredammo abbondantemente di formule, di dettagli, d' applicazioni e d' avvertenze ovunque lo credemmo opportuno. Quanto poi all' Idraulica, ella interessa sì da vicino la salute e i comodi della Società, e potrebbero costar sì cari al Cittadino i tentativi arditi d' un' equivoca teorìa, che è molto meglio passare in silenzio tutti i sistemi ingegnosi onde si lusingò taluno di aver fissate una volta l' ignote leggi dell' acque correnti. L' antiche regole quantunque incerte, con la lunga prescrizione e col suffragio unanime di tante età salveranno in ogni evento un Perito che le abbia prudentemente applicate: ma le dottrine che senza vantare una maggior certezza hanno di più la pericolosa impronta della novità, non potranno mai difenderlo dalla taccia di temerario, e in caso di sinistra riuscita, il promotore dei perniciosi precetti non sarà men detestato di colui che gli eseguì. Una riflessione di tanto peso non ci permise di bilanciare, e sacrificammo tutto intero alla pubblica sicurezza un interessante compendio della nuova Idraulica di Buat. Così l' Edizione dei nostri Elementi non ebbe principio che nel Giugno del 1787. Nella presente, che l' uso della prima per un intero decennio ha resa più corretta e più completa, si troverà citata con la lettera L. non più la seconda, ma la *quarta* Edizione delle Lezioni Elementari dell' Ab. Marie.

Comprendono questi Elementi la Meccanica, l' Idromeccanica, l' Ottica e l' Astronomìa. Bisogna convenire che l' Antichità così scarsa nei primi tre generi, abbondò stupendamente nell' ultimo; poichè quantunque i principj Statici e Idrostatici d' Archimede non incontrassero coltivatori, e restasse infeconda la stessa elementar notizia dell' ottiche refrazioni pubblicata da Tolomeo, fu però vivissimo negli Antichi il trasporto per l' Astronomìa, a cui forse gli invitava non men la grandezza dello spettacolo che la superstiziosa speranza di indovinar l' avvenire. L' Egitto e la Caldea ebbero una folla d' Astronomi; molti se ne contarono in Grecia, e più ancora al tempo dei Tolomei in Alessandria: ma qual progresso poteano essi fare in una Scienza sì complicata senza il soccorso della Meccanica e dell' Ottica? ridotti a fabbricare ipotesi o poco ferme o affatto strane, e a contentarsi d' osservazioni spesso erronee e sempre inesatte, obbligarono i Posteri a crear quasi di nuovo l' Astronomìa dopo aver gettati gli indispensabili fondamenti su cui si appoggia. Galileo ebbe la gloria di aprire il primo questa illustre carriera: contemplò la Dinamica e trovò le leggi dell' accelerazione uniforme dei gravi; passò all' Idraulica e dette dei precetti importanti sul movimento dell' acque; si rivolse all' Ottica e costruì teoricamente il telescopio; si compiacque nell' Astronomìa, e non contando le vittoriose ragioni con cui sostenne l' ipotesi Copernicana, scoprì delle macchie nel Sole, dei Satelliti intorno a Giove, delle Stelle innumerabili nel Firmamento. Tutti i Dotti si affrettarono sull' orme del glorioso Toscano: la Francia vide un Cartesio, l' Olanda un Ugenio, la Germania un Leibnitz, l' Inghilterra un Newton, quel celebratissimo Newton che più sublime d' Apollonio, più straordinario d' Archimede e più universale del medesimo Galileo da cui tanto imparò, seppe inventar delle nuove armi per forzar la Natura ne' suoi ultimi nascondigli, e scorse il vasto Paese della Fisica Matematica con tutta l' aria d' un Conquistatore a cui nulla resiste. Allora si eclissò quanto vi fu mai di raro e d' ammirabile nei secoli trapassati, e l' Europa si trovò talmente ricca d' ingegni originali, che lo Storico Matematico dovrà ben lungamente occuparsi per tramandarne alla posterità le scoperte.

I nostri Elementi sono un piccol saggio di tante egregie fatiche: ma tale è la natura di questo saggio, che se una volta riesca agli Studiosi d' impadronirsene (e non è punto difficile il riuscirvi), osiamo assicurargli del più rapido avanzamento allorchè vorranno continuar sui Classici il loro studio. Con questa mira abbiam preferita l' analisi alle sintetiche dimostrazioni che ad onta dell' esempio di Newton, tutti i Fisici hanno da lungo tempo abbandonate: per lo stesso fine si sono esposti con un semplice risultato più di cento problemi, le cui soluzioni serviranno del pari e al compimento dell' Opera, e all' abitual maneggio di quei principj che i grandi Autori suppongono ben familiari a chi legge. Possano i Giovani Matematici ricompensare un giorno le nostre fatiche col rendersi utili alla Patria ed a se stessi!

ELEMENTI DI FISICA MATEMATICA

L' Equilibrio e il movimento dei corpi ha data l' origine ad una Scienza vastissima che può riguardarsi come il fondamento di tutte le Scienze Fisico-Matematiche. Quando ella esamina l' equilibrio e il movimento dei corpi solidi, si chiama *Meccanica*; e quando tratta dell' equilibrio e movimento dei corpi fluidi, dicesi *Idromeccanica*.

ELEMENTI DI MECCANICA

1. La Meccanica si divide in due parti: l' una è la *Dinamica o Scienza delle Forze*, la quale poichè considera le forze generatrici del moto e le varie proprietà del moto medesimo, può anche chiamarsi *Teorìa del Moto*; l' altra è la *Statica o Scienza dell' Equilibrio*, e questa poichè specialmente si aggira sul modo di aumentar l' azione delle forze moventi, e compone una quantità di macchine che producono questo effetto, può anche chiamarsi *Teorìa delle Macchine*.

2. Sembra incredibile che vi sieno stati dei Filosofi impugnatori del moto; e allorchè si riflette ai lumi e al genio superiore di Zenone e degli Stoici, si sarebbe tentati a sospettare che malamente applicando essi il volgare assioma „ *per render ragione dei fenomeni naturali non dee ricorrersi a Dio* „ intendessero di negare non già l' esistenza

del moto, ma la possibilità di spiegarla fisicamente. Infatti il moto è uno di quei primarj fenomeni per la cui spiegazione non vi vuol meno dell' Onnipotenza e della Volontà suprema del Creatore: una considerazione che ci sarà in seguito di qualche uso, non lascia dubbio su questo punto.

3. In qualunque aspetto si riguardi il vasto ammasso dei corpi che compongono l' Universo e che son tutti compresi sotto il nome generico di *Materia*, non si giungerà mai a vedervi qualche intrinseca proprietà per cui possano da se medesimi determinarsi ad uno stato più che ad un altro. La materia ci comparisce sempre una sostanza necessariamente sorda e passiva, indifferente all' azione e all' inazione, al movimento e al riposo; una sostanza capace di tutte le possibili modificazioni, ma inabile a prenderne o a darne alcuna di suo arbitrio; in una parola, una sostanza il cui essenziale e distintivo carattere è l' *inerzia*. Or poichè si dee giudicar delle cose dalle idee che possono aversene, bisogna convenire che per necessità di natura la materia è radicalmente inattuosa ed inerte.

4. Se la materia non ha dunque movimento da se medesima, e regna intanto un moto continuato nella materia (poichè tutto ci persuade che non vi è corpo alcuno in riposo assoluto) è forza che Dio, Agente immateriale e Principio unico della Natura, per mezzo di certe generali e primitive cagioni lo produca perpetuamente e lo rinnovi. I Fisici riducono a tre queste cagioni, cioè all' *impulsione*, all' *affinità* e all' *attrazione* o *gravità*. Non parleremo delle due prime che non interessano ora il nostro soggetto; e quanto alla terza, senza prender quì o a sostenerla contro i cattivi ragionatori o a dimostrarla a chi tuttora ne stesse in dubbio, diremo solo che mille terrestri e celesti fenomeni, mille Fisici insigni, mille Astronomi d' un' esperienza consumata e d' una profondità straordinaria concorrono a gara ad attestarcene l' esistenza e a stabilir per legge invariabile che *l' attrazione cresce e scema in ragione inversa dei quadrati delle distanze*; cosicchè se un corpo attratto

dal centro C sia prima in A e poi in B, l' attrazione in A all' attrazione in B starà reciprocamente come CB^2 a CA^2. FIG. I.

PARTE PRIMA.

TEORÌA DEL MOTO

Natura del Moto.

La dimora d' un corpo e di tutte le sue parti nel luogo stesso chiamasi *quiete*; il loro cangiamento di luogo dicesi *moto*. Or poichè il *luogo* occupato da un corpo nello spazio immenso che abbiam d' intorno, è o *assoluto*, se ivi il corpo si trova, o *relativo* se la situazione del corpo è riferita a qualche oggetto che riposa o si muove: anche il moto del corpo può essere o *assoluto* o *relativo* secondo che il suo cangiamento è di luogo assoluto o di relativo. Quì parliamo del moto assoluto; il relativo propriamente appartiene all' Ottica, ed ivi ne tratteremo.

L' idea del moto comprende 1°. la *forza movente*: 2°. la *massa* del mobile: 3°. lo *spazio* che egli trascorre: 4°. il *tempo* che impiega a trascorrerlo: 5°. le *leggi* a cui costantemente obbedisce movendosi. 6°. gli *impedimenti* che incontra nel moversi.

5. La *forza movente* o *motrice* è quella che spingendo o attraendo il corpo, lo costringe a cangiar di luogo. Ella è o *momentanea* o *continuata*, e la continuata o è *costante* o *variabile*. Si dice *momentanea* quando abbandona il corpo nel momento medesimo in cui agisce sopra di lui, e si chiama *continuata* quando agisce sul corpo per tutto il tempo del moto. La *continuata costante* è quella che durante il moto non cresce nè scema, e la *continuata variabile* è quella che nel tempo del moto sempre cresce o sempre scema, o talora cresce e talora scema.

6. La *forza momentanea* produce il *moto uniforme* per cui il mobile in tempi qualunque eguali trascorre degli spa-

zj eguali. In fatti la forza momentanea abbandona subito il corpo (5): ma egli attesa la sua inerzia non può da se stesso ridursi alla quiete o variare il suo moto (3); dunque il suo moto è uniforme.

7. La *forza continuata* produce il *moto vario* per cui il mobile in tempi qualunque eguali trascorre degli spazj ineguali. Infatti la forza continuata agisce sempre sul corpo (5); dunque gli aggiunge o gli toglie sempre un nuovo moto; dunque il moto del corpo è vario. Di quì è che la forza continuata dicesi anche *acceleratrice*, o *ritardatrice*: fisseremo tra poco il valore di questi termini.

8. La *forza continuata costante* produce quella specie di moto vario che dicesi *uniformemente accelerato* o *ritardato* per cui il mobile in tempi qualunque eguali trascorre degli spazj con legge uniforme ineguali. Infatti la forza costante agisce sempre egualmente sul corpo (5); dunque il mobile acquista o perde sempre eguali gradi di moto; dunque il suo moto è sempre egualmente accresciuto o diminuito; dunque la legge degli aumenti o decrementi è uniforme; dunque il moto è uniformemente accelerato o ritardato.

9. La *massa* del corpo è la quantità di materia che lo compone; e poichè ciascuna molecula materiale è pesante, chiamate M, m due somme di molecule o due masse, e posta g la forza comune di gravità che le rende pesanti, saranno Mg, mg i pesi delle masse M, m; onde essendo $M : m :: Mg : mg$, si dee concludere che *le masse dei corpi son proporzionali o si stimano dal loro peso*. Errerebbe chi confondesse la massa col *volume* che è l' estensione occupata dal corpo, cioè la solidità o dimensione geometrica (L. 644): anzi son sì diversi tra loro il volume e la massa, che dalla combinazione di ambedue risulta la *densità* della materia.

10. Infatti poco vi vuole a comprendere che un corpo è tanto più o meno *denso* d' un altro, quanto direttamente è maggiore o minore la sua massa, e quanto reciprocamente è minore o maggiore il suo volume: onde poste D, d, M, m, V, v le densità, le masse e i volumi dei due corpi, si avrà (L. 311) $D : d :: M \times \frac{1}{V} : m \times \frac{1}{v} :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$.

11. E quì è importantissimo di osservare una volta per sempre che certe quantità puramente relative sogliono per compendio enuziarsi dai Matematici come assolute; talmente che quantunque un corpo non si chiami *denso* se non per il paragone che se ne fa con un altro corpo, nondimeno si costuma di dire assolutamente che *la densità è eguale alla massa divisa per il volume*, e abbandonata l' analogìa $D : d :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$, si adopera cortamente l' equazione $D = \frac{M}{V}$ o l' altra $d = \frac{m}{v}$. La vera equazione sarebbe $D = \frac{dMv}{mV}$; ed è perciò chiaro che in $D = \frac{M}{V}$ si suppone tacitamente $d = 1$, $v = 1$, $m = 1$, cioè si prendono d, v, m per *unità* di densità, di volume e di massa. Per esempio se dando all' acqua piovana come a termine di comparazione una densità $d = 1$, il volume d' un piede cubico di essa si chiami $v = 1$, e la massa o peso di tal misura si ponga $m = 1$; la densità d' un' altra materia qualunque, relativamente all' acqua piovana, sarà $D = \frac{dMv}{mV} = \frac{M}{V}$. Così d' ordinario si trattano i tempi, gli spazj, le velocità e altre simili quantità relative.

Anzi va tant' oltre l' usanza, che talora s' incontreranno perfino queste o somiglianti espressioni: $z = \frac{a^2}{x} = \frac{1}{x}$, *perchè* a^2 *è costante*; $z = \frac{yx}{m} = yx$, *perchè* m *è costante*. Tali oscurissime parole e tali equazioni apparentemente erronee divengon chiare e legittime, se si abbia in vista la nostra osservazione, e si rifletta che z è una quantità relativa; poichè l' analogìa portando in tal caso $Z : z :: \frac{a^2}{X} : \frac{a^2}{x} :: \frac{1}{X} : \frac{1}{x}$, ovvero $Z : z :: \frac{YX}{m} : \frac{yx}{m} :: YX : yx$, il Matematico enunzia assolutamente $z = \frac{a^2}{x} = \frac{1}{x}$ ovvero $z = \frac{yx}{m} = .$ yx, e si contenta d' avvertire che a^2 ovvero m son *costanti*, cioè che entrano e secondo le note regole (L. 262) si sopprimono in ambedue i termini delle analogie da cui ricavò quelle equazioni.

12. Lo *spazio* è la linea per cui scorre il corpo movendosi, e questa si misura con la *pertica*, col *braccio*, con la *tesa* ec.: ma le misure Francesi (L. 97) son divenute ormai sì comuni tra i Fisici ancor d' Italia, che per uniformarci al costume, le abbiamo noi pure adottate in questo Libro.

La linea trascorsa dal corpo è retta o curva. Il moto in linea retta relativamente ad una superficie piana è *parallelo* quando la linea del moto è sempre equidistante dalla superficie; è *diretto* o *perpendicolare* quando ella forma da ogni parte con la superficie un angolo di 90°; ed è *obliquo* quando l' angolo da qualche parte è maggiore o minor di 90°: ma relativamente ad una superficie curva il moto è *diretto* ovvero *obliquo* secondo che la linea del moto passa o non passa per il centro di curvatura. Il moto in linea curva è d' infinite specie. In generale la *direzion del moto* è la posizion della linea che il corpo trascorre: se il moto è *rettilineo*, la sua direzione è la stessa linea retta trascorsa, e se è *curvilineo*, la direzione è la tangente a quel punto della curva ove il mobile attualmente si trova.

13. Il *tempo* è la durazione del moto e si misura con l' *ore*, coi *minuti*, coi *secondi* ec.: ma i secondi ne sono la misura più ordinaria; cosicchè tutte le volte che il tempo del moto non sarà specialmente espresso, dovrà intendersi un moto che ha durato o può aversi in $1''$ o in un *momento* di tempo.

Quindi anche il momento in cui la forza momentanea agisce sul corpo (5) sarà per lo più $1''$: ma quando pur fosse $1'''$, $1''''$, $1'''''$ ec.: potrà sempre concepirsi in questo momento un' infinità di tempi più piccoli, mentre è noto che per esempio, $1'''''$ è divisibile in $60''''''$, $1''''''$ in $60'''''''$ ec.

(L. 96.) fino all' *istante*, che è per noi il limite di due contigue porzioni di tempo.

14. Chiamansi *leggi del moto* quelle regole che Dio e la Natura hanno stabilite per produrlo, conservarlo, comunicarlo, distruggerlo ec. Risultano esse dall' indole e costituzione della materia, e dalla sua relazione alla forza meccanica: le più generali son tre:

I. *Ogni corpo si mantiene nel suo stato di quiete o di moto uniforme e rettilineo finchè una cagione esterna non lo forzi ad abbandonar quello stato*. Infatti la materia non può da se stessa passar da uno stato ad un altro (3); dunque se un corpo è in quiete non potrà dare a se stesso un moto, e se è in moto non potrà toglierselo; dunque mosso una volta, non potrà variare il suo moto che sarà perciò uniforme (6); dunque giacchè ogni moto comincia necessariamente con una linea retta almeno infinitesima, il mobile non potendo per se medesimo cangiar direzione, avrà un moto rettilineo. Perciò se un corpo si muove, è certo che fu spinto o attratto; se il suo moto si estingue, è segno che incontrò degli ostacoli; se accelera o ritarda, convien dire che qualche forza continuamente lo sollecita o gli si oppone; se descrive un poligono di finiti o d' infiniti lati, è questo un indizio che la forza movente cangia direzione o di tanto in tanto o ad ogni istante, e quando improvvisamente ella cessi, il mobile anderà nella direzione del lato in cui si trova.

15. II. *La mutazione dello stato in un corpo allorchè passa dalla quiete al moto, è proporzionale alla forza motrice e seconda la linea retta nella cui direzione questa forza s' imprime*. Poichè non potendo nascer la mutazione dal corpo stesso (3), sarà prodotta unicamente dalla forza impressa; onde la doppia forza produrrà un doppio moto, la tripla un moto triplo ec., e il moto sarà proporzionale alla forza: e giacchè non può esser nel corpo ragione alcuna per qui la direzion del suo moto sia diversa dalla di-

vezion della forza, avranno dunque ambedue una medesima direzione.

16. III. *La reazione è eguale e contraria all' azione, cioè l' azioni di due corpi l' un contro l' altro son sempre eguali e si dirigono in parti opposte*. Imperocchè l' inerzia della materia (3) fa che indipendentemente ancora dalla gravità, ella resista in tutti i sensi al moto quando è in quiete, e alla quiete quando è in moto, proprietà a cui si è dato il nome di *forza d' inerzia*. Or tutti sanno che vi vuole un' istessa forza e per dare e per togliere un certo moto ad un corpo, e che è tanto maggiore la sua resistenza alla quiete o al moto, quanto è più grande la sua massa ed il moto che gli si vuol togliere o dare: onde la forza d' inerzia è proporzionale e alla massa del corpo e al cangiamento del suo stato attuale. Quando dunque un corpo va contro di un altro, questo per la sua forza d' inerzia resiste a quello, e perciò distrugge in quello tanto di forza quanto ha egli di resistenza: ora la porzione della forza distrutta chiamasi *azione*, e la resistenza che la distrugge, dicesi *reazione*; dunque la reazione è contraria ed eguale all' azione. E da ciò si raccoglie che la forza d' inerzia è il mezzo per cui si comunica il moto da un corpo ad un altro: ogni corpo resiste al moto e nel resistervi lo riceve; e poichè la reazione è contraria ed eguale all' azione, un corpo riceve precisamente tanto moto quanto ne distrugge nel corpo che glielo dà.

Le leggi di *Continuità* e di *Risparmio* che qualche Fisico ha introdotte nel moto, non sono di alcun uso in questi Elementi e perciò non ci fermiamo a parlarne.

17. Dicesi in generale *impedimento del moto* la resistenza che fanno ad un mobile i corpi tra cui si muove. Ella nasce e dall' *impenetrabilità* dei corpi medesimi che non danno passaggio al mobile se non sieno spinti e discacciati da lui, e dall' *attrito* o sfregamento del mobile sopra quei corpi che gli servono di sostegno. Dall' aria, dall' acqua e dagli altri *mezzi* o fluidi nasce ordinariamente il primo impedi-

pedimento, come dal legno, dal ferro o dagli altri solidi è cagionato il secondo. Sarebbe impossibile di fissar qualche cosa nella Scienza del moto se non si facesse astrazione da questi ostacoli: onde riserbando ad altro luogo il particolare esame e dell' attrito dei solidi e della resistenza dei mezzi, intendiamo quì di stabilire le proprietà del moto come se nulla vi si opponesse nella Natura.

Moto uniforme e vario.

18. Il moto prodotto dalla forza momentanea si chiama *uniforme* (6), e l' attitudine che questa forza partecipa al mobile di trascorrere un certo spazio in un certo tempo, dicesi *celerità*: onde per aver la celerità del moto uniforme bisogna combinar lo spazio col tempo. Infatti si sa che un corpo è tanto più o meno *celere* d' un altro, quanto direttamente è maggiore o minore lo spazio che egli trascorre, e quanto reciprocamente è minore o maggiore il tempo che impiega a trascorrerlo: onde chiamando C, c, S, s, T, t le celerità, gli spazj ed i tempi, avremo (L. 311) $C : c :: S \times \frac{1}{T} : s \times \frac{1}{t} :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$, e quindi $C = \frac{S}{T}$, (11), cioè *la celerità di un corpo nel moto uniforme eguaglia lo spazio diviso per il tempo*.

19. Che se voglia sapersi la quantità del moto che la forza produce nel mobile, basterà osservare che quel moto è l' effetto di questa forza: e poichè la cagione si misura dal suo effetto (15), avranno una stessa misura e perciò saranno in questo senso altrettante voci equivalenti il *moto*, *la quantità del moto*, *l' effetto del moto e la forza movente*. Ora l' effetto della forza momentanea cioè il moto uniforme (6) consiste nel dare in un momento ad una certa massa una certa celerità; onde il moto dipende dalla combinazion dell' una coll' altra. Infatti la forza si stima tanto più o men grande d' un' altra, quanto è maggiore o minore e la massa che muove e la celerità che le imprime

in un momento: e però chiamando 1 il momento, F, f, C, c, M, m le forze, le celerità e le masse, si avrà (L. 310) $F \times 1 : f \times 1 :: C \times M : c \times m$, e quindi (11) $F \times 1 = F = MC$, cioè *la forza momentanea o la quantità del moto eguaglia il prodotto della celerità per la massa*.

20. Due son dunque le formule fondamentali del moto uniforme: 1ª, $C = \frac{S}{T}$; 2ª. $F \times 1 = F = CM$. Sostituendo nella seconda il valor di C preso dalla prima, si ha $FT = MS$ e con queste tre equazioni può formarsi la seguente

TAVOLA

Per il Moto uniforme.

	Date	si ha	Formule
21.	F, M	C	$C = \frac{F}{M}$
22.	S, T		$C = \frac{S}{T}$
23.	C, M	F	$F = CM$
24.	M, S, T		$F = \frac{MS}{T}$
25.	C, F	M	$M = \frac{F}{C}$
26.	F, S, T		$M = \frac{FT}{S}$
27.	C, T	S	$S = CT$
28.	F, M, T		$S = \frac{FT}{M}$
29.	C, S	T	$T = \frac{S}{C}$
30.	F, M, S		$T = \frac{MS}{F}$

31. Questa Tavola non solamente fa conoscere le proprietà tutte del moto uniforme, ma anche tutte le relazioni tra due moti uniformi diversi. Abbiansi, per esempio, due moti uniformi in cui gli spazj trascorsi siano come i cubi dei tempi, e si voglia la ragione delle celerità; è chiaro che trattandosi di spazj, tempi e celerità, ha luogo la formula $C = \frac{S}{T}$ (22) per l'uno, e $C' = \frac{S'}{T'}$ per l'altro moto; e poichè si suppone $S : S' :: T^3 : T'^3$, preso di qui il valore d'una quantità qualunque, come di S', si avrà (L. 257) $S' = \frac{ST'^3}{T^3}$, onde $C' = \frac{ST'^3}{T^3 T'} = \frac{ST'^2}{T^3}$, e però $C : C' :: \frac{S}{T} : \frac{ST'^2}{T^3} :: T^2 : T'^2$, cioè le celerità saranno come i quadrati dei tempi, ec.

32. Passando ora al moto vario (7), osservo che supposta finita la celerità c acquistata nel tempo finito t, l'acquistata nel tempo infinitesimo $\frac{t}{\infty} = dt$ (L. 1005) sarà infinitesima o $\frac{c}{\infty}$: poichè se in un tempo infinitesimo si acquistasse una celerità finita, in un tempo finito se ne acquisterebbe una infinita, contro l'ipotesi. Dunque in un tempo infinitesimo l'aumento o il decremento di c sarà infinitesimo, e la total celerità del corpo in moto diverrà $c \pm \frac{c}{\infty} = c$ (L. 268.): perciò per un tempo dt la celerità variabile e il moto vario che ne risulta, posson prendersi per uniformi.

33. Ora nel moto uniforme, chiamando x lo spazio, si ha $c = \frac{x}{t}$ (22), cioè $1 : c :: t : x$. Ma t nel presente caso è un tempo infinitesimo dt; dunque $1 : c :: dt \left(= \frac{t}{\infty}\right) : x = \frac{ct}{\infty} = (27) \frac{s}{\infty} = ds$, cioè lo spazio x trascorso in questo

tempo è un infinitesimo ds; dunque nel moto vario avremo $c = \frac{ds}{dt}$.

34. Di nuovo, nel moto uniforme, chiamando z la celerità, abbiamo $F \times 1 = Mz$ (20), cioè $M : F :: 1 : z$. Ma 1 nel presente caso è un tempo infinitesimo (13) $= \frac{t}{\infty}$ (L.266) $= dt$: dunque $M : F :: \frac{1}{\infty} : z = \frac{F}{\infty M} = \frac{c}{\infty}$ (21) $= \pm dc$, cioè la celerità z generata o distrutta in questo tempo, è un infinitesimo $\pm dc$, preso il segno $+$ quando la forza è acceleratrice e genera una nuova celerità, e il segno $-$ quando è ritardatrice e l' estingue (7); dunque nel moto vario avremo $Fdt = \pm Mdc$. Fatto $\frac{F}{M} = \varphi$, si ha $\varphi dt = \pm dc$ ove φ che dipende da F, generalmente parlando, varia come F in ciascun punto del moto.

Due son dunque anche per il moto vario le formule fondamentali, e da queste posson dedursene altre tre; eccole tutte insieme.

35. I^a. $c = \frac{ds}{dt}$.

36. II^a. $\varphi dt = \pm dc$.

37. Differenziando la prima, si ha la III^a. $dc = d\left(\frac{ds}{dt}\right)$.

38. Combinando le due prime, nasce la IV^a. $\varphi ds = \pm cdc$.

39. Combinando la seconda e la terza si ottiene la V^a $\varphi dt = \pm d\left(\frac{ds}{dt}\right)$, ove secondo l' occorrenze potrà prendersi ds o dt costante.

40. Fissiamo ora il vero senso della quantità φ. Si è fatto $\varphi = \frac{F}{M}$ (34): ma $\frac{F}{M} = C$ (21) $= \frac{S}{T}$ (22) $= \frac{S}{1''} = S$; dunque I^a. $\varphi = C$, cioè φ è quella celerità C che l' at-

tual vigore della forza acceleratrice F divenuta momentanea, produrrebbe nel mobile: II°. $\varphi = S$, cioè φ è quello spazio S che per la forza acceleratrice F divenuta momentanea trascorrerebbe il mobile con moto uniforme nel tempo $T = 1''$. Si noti intanto 1°. che il moto essendo vario non si manterrà nel secondo tempo T', nel terzo T'' ec. quale ora nel primo tempo T; onde nel secondo, nel terzo ec. non si avrà più $\varphi = C = S$, ma $\varphi = C' = S'$, $\varphi = C'' = S''$ ec., e φ varierà ad ogni momento come già si avvertì (34): 2°. che quantunque φ denoti in rigore una celerità o uno spazio, i Meccanici però intendon per φ la forza stessa acceleratrice, mentre è ordinario in Dinamica di chiamar *forze* gli effetti che esse producono (19): di modo che posta F la forza motrice, $\frac{F}{M} = \varphi$ sarà per noi la forza acceleratrice.

Moto uniformemente accelerato e ritardato.

41. Ha insegnato l' esperienza (e noi lo dimostreremo altrove) che i corpi abbandonati alla lor gravità scendono perpendicolarmente alla superficie HNP quasi sferica della Terra, e nella nostra *latitudine* trascorrono in $1''$ uno spazio di $15^{\text{pie.}}$, $0915 = 15^{\text{pie.}}$, 1 in circa. Chi da queste osservazioni volesse dedurre che le direzioni BH, DI son convergenti e che l' attrazione scemando come crescono i quadrati delle distanze (4) fa trascorrere al mobile uno spazio sempre più piccolo in B, in A ec., ragionerebbe a rigore: per altro la distanza quasi infinita del Centro C dalla superficie HN, ci autorizza a dire con egual verità che dentro certi limiti le direzioni BH, DI posson prendersi per parallele, e la forza d' attrazione, o di gravità per costante. 1

42. Infatti posto il raggio medio terrestre $CH = 19631100^{\text{pie.}}$, $HB = 200^{\text{pie.}}$, $BD = 100^{\text{pie.}}$, avremo $tang\, C = \frac{BD}{CB} = \frac{1}{196313}$ (L. 742) fatto $R = 1$, e $L\, tang\, C = L1 - L\, 196313 = L\, tang\, 0°, 0', 1''$ incirca; onde (L. 513) $D =$

FIG. $89°$, $59'$, $59'' = 90°$ vicinissimamente; dunque dentro i limiti almeno di $BD = 100^{\text{pie.}}$, le direzioni BH, DI dei gravi ca-
1. denti son fisicamente parallele.

43. Di nuovo; preso il raggio terrestre $CB = r = 19631100^{\text{pie.}}$, una distanza $BA = d = 12000^{\text{pie.}}$, l'attrazione in B o l'effetto di lei $a = 15{,}09$ 5 (41), se l'attrazione in A si chiami z, avremo $(r+d)^2 : r^2 :: a : z$ (4), onde $z = \frac{ar^2}{(r+d)^2} = 15^{\text{pie.}}, 073$, cioè la differenza tra l'attrazione in B sulla Terra ed in A alla distanza di $12000^{\text{pie.}}$ è minore di $\frac{1}{50}$ di piede; dunque dentro i limiti almeno di $2000^{\text{tes.}}$ la forza di gravità è sensibilmente costante, e il moto dei gravi che per questo spazio scendono o salgono, è vario ma uniformemente accelerato o ritardato (8).

44. Quindi per trovar la celerità in B d'un grave (a cui per maggiore universalità supporremo impressa all'ingiù una celerità nota p) ed avere il tempo che impiega a scendere da A in B, chiamata c la celerita finale in B, s lo spazio AB, t il tempo speso a trascorrerlo, e g la forza acceleratrice φ di gravità (40), avremo $gds = cdc$ (38). Ora questa formula che naturalmente non sarebbe integrabile (34), lo è nel nostro caso perchè g è costante (43); onde integrando, si ha $gs = \frac{c^2}{2} + Cost.$ (L. 1018). Per determinar la *Costante*, osservo che quando il mobile è in A, cioè quando $s = 0$, ha la sola celerità p che gli fu impressa sul principio del moto, e però allora $c = p$; dunque $0 = \frac{p^2}{2} + Cost.$, e quindi $Cost. = \frac{-p^2}{2}$, onde infine $gs = \frac{c^2 - p^2}{2}$ e $c = \sqrt{(2gs + p^2)}$.

Avremo ancora $c = \frac{ds}{dt}$ (35) ovvero $dt = \frac{ds}{\sqrt{(2gs+p^2)}}$, ove fatto $\sqrt{(2gs+p^2)} = x$ e però $ds = \frac{xdx}{g}$, sarà $dt = \frac{dx}{g}$; ed integrando, $t = \frac{x}{g} + Cost. = \frac{\sqrt{(2gs+p^2)}}{g} + Cost.$ La Costante si determinerà se si rifletta che quando $t = 0$, anche $s = 0$, dal che si ha $0 = \frac{p}{g} + Cost.$, e però $Cost. = \frac{-p}{g}$, onde infine $t = \frac{\sqrt{(2gs+p^2)} - p}{g}$.

Dalla prima equazione abbiamo $s = \frac{c^2 - p^2}{2g}$, dalla seconda $s = \frac{gt^2}{2} + pt$, e se i valori di g, p presi dall'una si sostituiscono nell'altra, si troverà $s = \frac{t(c+p)}{2}$, $s = ct - \frac{gt^2}{2}$, con le quali quattro equazioni che danno la quinta $p = c - gt$, si ha la seguente

TAVOLA

Per il moto uniformemente accelerato.

	Date	si ha	Formule
45.	g, p, s		$c = \sqrt{(2gs + p^2)}$
46.	g, p, t		$c = gt + p$
47.	g, s, t	c	$c = \frac{s}{t} + \frac{gt}{2}$ *
48.	p, s, t		$c = \frac{2s}{t} - p$
49.	c, p, s		$g = \frac{c^2 - p^2}{2s}$
50.	c, p, t		$g = \frac{c - p}{t}$
51.	c, s, t	g	$g = \frac{2}{t}\left(c - \frac{s}{t}\right)$ *
52.	p, s, t		$g = \frac{2}{t}\left(\frac{s}{t} - p\right)$
53.	c, g, s		$p = \sqrt{(c^2 - 2gs)}$ *
54.	c, g, t		$p = c - gt$ *
55.	c, s, t	p	$p = \frac{2s}{t} - c$ *
56.	g, s, t		$p = \frac{s}{t} - \frac{gt}{2}$ *

	Date	si ha	Formule
57.	c, g, p	s	$s = \frac{c^2 - p^2}{2g}$
58.	c, g, t		$s = t\left(c - \frac{gt}{2}\right)$ *
59.	c, p, t		$s = t\left(\frac{c + p}{2}\right)$
60.	g, p, t		$s = t\left(\frac{gt}{2} + p\right)$
61.	c, g, p	t	$t = \frac{c - p}{g}$
62.	c, g, s		$t = \frac{c + \sqrt{(c^2 - 2gs)}}{g}$ *
63	c, p, s		$t = \frac{2s}{c + p}$
64	g, p, s		$t = \frac{\sqrt{(2gs + p^2)} - p}{g}$

65. In questa Tavola che fa conoscere le proprietà tutte del moto uniformemente accelerato, son segnate con * l' otto formule che divengono inutili quando non si suppon ga impressa nel mobile alcuna celerità iniziale, cioè quando $p = 0$: nell' altre è manifesto che se sia $p = 0$, bisogna soppprimere i termini ove si trova p.

66. Applicazioni. I. Poichè fatto $p = 0$, si ha $s = \frac{gt^2}{2}$ (60) e per un' altro spazio s' si avrebbe $s' = \frac{gt'^2}{2}$, sarà $s : s' :: \frac{gt^2}{2} : \frac{gt'^2}{2} :: t^2 : t'^2$: ma $t = \frac{c}{g}$ (61) onde $t^2 : t'^2 :: \frac{c^2}{g^2} : \frac{c'^2}{g^2} :: c^2 : c'^2$; dunque *gli spazj trascorsi dal principio del moto sono come i quadrati de' tempi o delle celerità*. Poichè dunque in 1'' si ha $s = 15^{pie.}, 1$ (41), sarà $15, 1 : s' :: 1 : t'^2$; onde se $t' = 3''$, sarà $s' = 135^{pie.}, 9$ e se $s' = 2174^{pie.}, 4$, sarà $t'^2 = 144$ e $t' = 12''$ ec.

II. Diviso pertanto in eguali porzioni il tempo del moto onde la prima sia t, le due prime $2t$, le tre prime $3t$ ec., se gli spazj trascorsi in questi tempi sieno s, s', s'' ec., saranno

ranno s, $s' - s$, $s'' - s'$ ec. gli spazj trascorsi in tempi eguali; e giacchè (60) $s = \frac{gt^2}{2}$, $s' = \frac{4gt^2}{2} = 4s$, $s'' = \frac{9gt^2}{2} = 9s$ ec., gli spazj in tempi eguali saranno s, $s' - s = 3s$, $s'' - s' = 5s$ ec. Ora questi termini crescono come i numeri impari; dunque *nel moto uniformemente accelerato gli spazj trascorsi in porzioni eguali di tempo formano la serie* 1, 3, 5, 7 . . . . $2m + 1$. Quindi poichè posto $t = 1''$ si ha $s = 15^{pie.}$ in circa (41), nel seguente minuto'' si avrà $s' - s = 3s = 45^{pie.}$, ec.

67. Serve anche la nostra Tavola a far conoscere le relazioni tra due moti uniformemente accelerati e diversi. Date per esempio le forze g, g' e i tempi t, t', vogliasi la ragione di due spazj s, s' che furon trascorsi con due diversi moti: è chiaro che si avrà $s : s' :: \frac{gt^2}{2} : \frac{g't'^2}{2} :: gt^2 : g't'^2$, cioè gli spazj saranno in ragion composta delle forze e dei quadrati dei tempi. Quindi poichè, ad egual distanza dal centro terrestre due gravi di differenti masse M, M' debbono evidentemente percorrere spazj eguali in tempi eguali, sarà in questo caso $s = s'$, $t = t'$, e (34.44) $g\left(=\frac{F}{M}\right) = g'\left(=\frac{F'}{M'}\right)$; dunque F : F' :: M : M', cioè *le forze d' attrazione o di gravità, son proporzionali alle masse*.

68. Le formule dei numeri 49. 50. 51. 52. servono a determinar g allorchè si conoscono tre delle quattro quantità c, p, s, t. Con questo mezzo si troverebbe la forza acceleratrice dei gravi liberamente cadenti verso la superficie del Sole, di Saturno, di Giove ec: e quanto alla Terra, poichè si sa che in 1'' un grave trascorre $15^{pie.}, 0915$ (41), sarà $t = 1''$, $s = 15, 0915$, e quindi (52) $g = \frac{2s}{t^2} = 30, 183$, cioè (40) la forza acceleratrice terrestre genera in 1'' tanta celerità da far trascorrere al grave in questo tempo e con moto uniforme uno spazio di $30^{pie.}, 183 = 30, 2$ in circa.

Onde la nostra Tavola può anche adoperarsi a paragonare il moto uniforme con l'uniformemente accelerato.

69. Applicazioni. I. Supposto che un mobile scorrendo con moto uniformemente accelerato uno spazio s si trovi infine con una celerità c, quale spazio S trascorrerà nel tempo stesso con moto uniforme e con la stessa celerità finale c? Sarà dunque $C = c$ e $T = t$: ma $s = \frac{ct}{2}$ (59) ed $S = CT$ (27); dunque $S = ct$, cioè *de' due spazj trascorsi in egual tempo, l'uno con moto uniformemente accelerato, l'altro con moto uniforme e con la celerità finale di quello, il secondo è doppio del primo.*

II. Quale spazio s avrebbe dovuto trascorrere con moto uniformemente accelerato un corpo che con moto uniforme trascorre lo spazio $S = 100^{\text{pie.}}$ in un tempo $T = 3''$? Poichè son dati S, T, si avrà $C = \frac{S}{T}$ (22): ma la celerità C è la celerità finale c del supposto moto uniformemente accelerato; dunque $c = C = \frac{S}{T}$. Ora $s = \frac{c^2}{2g}$ (57); dunque $s = \frac{S^2}{2gT^2} = \frac{10000}{2.30,2.9}$ (68) $= 18^{\text{pie.}}, 4$.

70. Questo spazio $s = \frac{S^2}{2gT^2}$ dicesi dai Meccanici *altezza dovuta ad una data celerità* C, come all'incontro chiamasi C la *celerità dovuta ad una data altezza s*, cioè a quell'altezza da cui un mobile dovrebbe cadere per acquistar la celerità C: e poichè per una celerità C si avrebbe $s = \frac{S^2}{2gT^2} = \frac{C^2}{2g}$ (69) e per una celerità C' si avrebbe $s' = \frac{C'^2}{2g}$ onde $C : C' :: \sqrt{s} : \sqrt{s'}$, ne segue che *le celerità acquistate sono come le radici dell'altezze a loro dovute.*

71. Dal che si raccoglie che quanto abbiam detto del moto uniformemente accelerato nel caso di $p = 0$ (66) ha luogo del pari nel caso di $p > 0$: poichè fatto $\frac{p^2}{2g} = a$, sarà

 FIG.

a l'altezza dovuta alla celerità p (70); dunque il mobile potrà supporsi caduto dall'altezza $a + s$ coi consueti fenomeni dell'accelerazione, e tutta la differenza del moto consisterà nell'aver egli al fine dello spazio s quella stessa celerità che senza l'iniziale p avrebbe solamente al fine dello spazio $a + s$.

72. Quanto al moto uniformemente ritardato (in cui per distinzione invece di c, s, t useremo le lettere greche χ, σ, τ) se il corpo B si spinga verticalmente in su per $BA = \sigma$ con una data celerità p, e voglia sapersi la sua celerità χ in A, I.
e il tempo τ che impiega a salirvi, bisognerà prender la formula $gd\sigma = -\chi d\chi$ (38) che conviene alla forza ritardatrice (34), ed integrando tanto questa quanto l'altra $\chi = \frac{d\sigma}{d\tau}$ (35) come si è fatto sopra alle loro compagne (44), si troveranno primieramente le due equazioni $\sigma = \frac{p^2-\chi^2}{2g}$, $\sigma = p\tau - \frac{g\tau^2}{2}$, e poi operando pur come sopra, si otterranno le altre due $\sigma = \frac{\tau(\chi+p)}{2}$, $\sigma = \chi\tau + \frac{g\tau^2}{2}$, con le quali e con la quinta $p = \chi + g\tau$ che ne risulta, può formarsi la seguente

Tavola per il Moto uniformemente ritardoto.

	Date	si ha	Formule
73.	g, p, σ	χ	$\chi = \sqrt{(p^2 - 2g\sigma)}$
74.	g, p, τ		$\chi = p - g\tau$
75.	g, σ, τ		$\chi = \frac{\sigma}{\tau} - \frac{g\tau}{2}$
76.	p, σ, τ		$\chi = \frac{2\sigma}{\tau} - p$
77.	χ, p, σ	g	$g = \frac{p^2-\chi^2}{2\sigma}$
78.	χ, p, τ		$g = \frac{p-\chi}{\tau}$
79.	χ, σ, τ		$g = \frac{2}{\tau}\left(\frac{\sigma}{\tau} - \chi\right)$
80.	p, σ, τ		$g = \frac{2}{\tau}\left(p - \frac{\sigma}{\tau}\right)$

FIG.

	Date	si ha	Formule
81.	χ, g, σ		$p = \sqrt{(2g\sigma + \chi^2)}$
82.	χ, g, τ		$p = \chi + g\tau$
83.	χ, σ, τ	p	$p = \frac{2\sigma}{\tau} - \chi$
84.	g, σ, τ		$p = \frac{\sigma}{\tau} + \frac{g\tau}{2}$
85.	χ, g, p		$\sigma = \frac{p^2 - \chi^2}{2g}$
86.	χ, g, τ	σ	$\sigma = \tau\left(\chi + \frac{g\tau}{2}\right)$
87.	χ, p, τ		$\sigma = \tau\left(\frac{\chi + p}{2}\right)$
88.	g, p, τ		$\sigma = \tau\left(p - \frac{g\tau}{2}\right)$
89.	χ, g, p		$\tau = \frac{p - \chi}{g}$
90.	χ, g, σ	τ	$\tau = \frac{\sqrt{(\chi^2 + 2g\sigma)} - \chi}{g}$
91	χ, p, σ		$\tau = \frac{2\sigma}{\chi + p}$
92	g, p, σ		$\tau = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 2g\sigma)}}{g}$

Questa Tavola comprende le proprietà tutte di uno o più moti uniformemente ritardati, e le relazioni tra l' accelerato, il ritardato e l' uniforme. Basti un esempio.

93. Poichè un mobile cadendo da A liberamente (cioè

I. fatto $p = 0$) e trascorrendo $AB = \frac{c^2}{2g}$ (57) acquista in B la celerità finale c, se si supponga che con questa medesima celerità sia rispinto da B in alto, e si voglia lo spazio totale che trascorrerà all' insù, troveremo $\sigma = \frac{p^2 - \chi^2}{2g}$ (85): ma per ipotesi $p = c$ e $\chi = 0$, perchè nel punto estremo dello spazio totale il mobile ha perduta ogni celerità; dunque $\sigma = \frac{c^2}{2g} = s$; dunque la *celerità acquistata da un corpo cadendo può farlo risalire all' altezza da cui partì*. Dal che

FIG.

può dedursi che le proprietà del moto uniformemente ritardato son simili in senso contrario a quelle che osservammo nell' uniformemente accelerato (66).

94. Anche il moto per i piani inclinati è uniformemente accelerato o ritardato: ne parleremo in breve. Quì frattanto si osservi che le varie specie di moto considerate finora offrono questo teorema importante: *se le forze moventi sieno come i prodotti delle masse negli spazj trascorsi, i tempi de' moti saranno eguali*. Le formule già stabilite (20. 33. 34. 44. 72.) ne danno spontaneamente la dimostrazione.

Moto composto;

Se la forza motrice è unica, il moto di qualunque specie egli sia, ordinariamente si chiama *semplice*: ma se un *sistema di forze*, cioè più forze unite insieme agiscano contemporaneamente sul corpo con differenti direzioni, il moto o sia uniforme o sia vario, si chiama *composto*,

95 Sia dunque il mobile M (dalla cui gravità si prescinde per ora) e le due forze *omogenee* F, f con le dire- 2.
zioni ME, MI in angolo: se le forza semplice F faccia scorrere ad M lo spazio $ME = S = s$ nel tempo stesso T in cui la forza semplice f gli fa scorrere lo spazio $MI = S' = s'$, quale spazio gli faranno scorrere riunite in sistema nel medesimo tempo T? Diviso il comun tempo T in parti qualunque eguali a cui corrispondano le parti MB, BD, DE ed MR, RH, HI degli spazj totali ME, MI, si conducano da B, D, E e da R, H, I le parallele ad MI, ME. E' manifesto che o F agisca immediatamente sul mobile M, o spinga tutta la MI parallelamente a se stessa mentre il mobile la trascorre, dovrà risultarne per M lo stesso moto composto. In questo secondo caso, quando M sarà giunto in R lungo MI, la MI sarà passata in B lungo ME, onde M si troverà in K; quando sarà giunto in H, la MI sarà passata in D, onde M si troverà in L; e quando sarà giunto in I, la MI sarà passata in EN, onde M si troverà in N: cosicchè nel tempo T il mobile anderà da M in N per K ed L. Or

le due forze F, f sono omogenee; dunque le parti degli spazj percorse in egual tempo saranno proporzionali agli interi spazj percorsi nel comun tempo T, e si avrà $F : f :: \frac{MS}{T} : \frac{MS'}{T}$ (26) $:: S : S' :: g : g'$ (67) $:: gt^2 : g't^2 :: s : s'$ (60) $::$ ME :

2. MI :: MB : MR :: MD : MH :: NI : IM :: KR : RM :: LH : HM; dunque (L. 556) i punti M, K, L, N appartengono al lato del triangolo MIN simile ai triangoli MRK, MHL, e questi punti sono nella diagonale MN del parallelogrammo IE; dunque in generale *il corpo* M *spinto dalle forze omogenee* F, f *va per la diagonale del parallelogrammo fatto dalle rette* ME, MI *rappresentanti le forze, nel tempo stesso in cui l' una lo condurrebbe da* M *in* E, *l' altra da* M *in* I. Segue da ciò

96. 1°. Che la diagonale MN rappresenta l' effetto delle forze congiunte F, f: onde chiamando Φ la forza composta che spinge il corpo per MN, si avrà F rappresentata da ME, f da MI, Φ da MN e quindi F : f : Φ :: ME : MI : MN. La forza composta φ dicesi la *risultante*.

97. 2°. Che descritto col raggio MI l' arco IST e condotte sopra ME le normali IG, SQ e sopra MN la normale IK, avremo F : f : Φ :: ME : MI : MN :: ME : EN : NM :: *sen* MNE : *sen* NMB : *sen* MEN (L 738) :: *sen* IMN : *sen* NME : *sen* IME (L. 500. 690) :: IK : SQ : IG, cioè *qualunque delle tre forze potrà sempre rappresentarsi col seno dell' angolo, che è compreso tra le direzioni dell' altre due*.

98. 3°. Che le direzioni ME, MI, le quali si tagliano in M, sono in uno stesso piano (L. 617); e poichè la direzione MN è nel piano del parallelogrammo IE di cui è diagonale, bisogna concludere che *le direzioni di due forze quando s' incontrano son sempre nel piano medesimo con la direzione della lor risultante*.

99. 4°. Che producendosi uno stesso effetto dalle forze congiunte F, f e dalla lor risultante Φ, potrà Φ sostituirsi ad F, f; e reciprocamente ogni forza unica Φ potrà risolversi

nelle due F, f: anzi riguardando F, f come risultanti ciascuna di altre due ec. in infinito, *qualunque sia il numero* n *delle forze che nel tempo stesso e nello tsesso piano agiscono sul corpo* M, *esse potranno sempre ridursi ad un numero* $n-1$, $n-2$, $n-3$ ec.; e reciprocamente *ogni forza unica potrà risolversi in* 2, 3, 4 . . . . n *forze, purchè le componenti sieno lati di parallelogrammi che abbian per risultante la diagonale*. 2.

Il parallelogrammo IE chiamasi *parallelogrammo delle forze*, e da esso derivano i generali principj dell' equilibrio. Ci sia permesso di darne un cenno per modo almeno di digressione: ogn' altro luogo sarebbe meno a proposito del presente.

100. Fatta ME $= a$, MI $=$ EN $= b$, e l' angolo MEN $= x$, avremo (L. 767) MN $= \sqrt{(a^2 + b^2 - \frac{2ab\cos x}{R})}$. Or supposto R $= 1$ e differenziando quest' equazione per aver la massima risultante MN, verrà $\frac{d(MN)}{dx} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{ab\,sen\,x}{\sqrt{(a^2+b^2-2ab\cos x)}} = 0$ (L. 1043); cioè 1°. $ab\,sen\,x = 0$; 2°. $\sqrt{(a^2+b^2-2ab\cos x)} =$ MN $= 0$. Fermiamoci a considerar queste due formule.

101. I°. Poichè $ab\,sen\,x = 0$, sarà $sen\,x = 0$, onde 1°. $x = 180°$ e $\cos x = -1$; 2°. $x = 0$ e $\cos x = 1$ (L. 692). Nel primo caso, l' angolo x ottuso dà il massimo MN $= \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab)} = a + b$; nel secondo, l' angolo x acuto da il minimo MN $= \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab)} = a - b$ (L. 767): onde si ha la massima MN ($= a + b$) quando EN ($= b$) gira in fuori facendo un angolo MEN $= x = 180°$ e forma perciò una sola retta con ME ($= a$); allora la forza MI sempre parallela ad EN gira indentro fino a far l' angolo EMI $= 0$ e cade perciò sulla stessa ME: per l' opposto si ha la minima MN ($= a - b$) quando EN ($= b$) gira in dentro facendo un angolo MEN $= x = 0$ e cade perciò sopra EM ($= a$); allora la forza MI gira in fuori fino a far l' angolo EMI $= 180°$ e

FIG. forma perciò una sola retta con EM. Cosicchè nel caso del
2. massimo operando le forze F, f nel senso e nella direzione medesima, la risultante è sempre $\Phi = F + f$; e nel caso del minimo operando le forze nella direzione stessa ma in senso contrario, la risultante è sempre $\Phi = F - f$.

102. Dunque in generale, finchè le forze F, f conserveranno una medesima direzione, la risultante sarà $\Phi = F \pm f$; e poichè la direzione medesima evidentemente conservasi non solo nella coincidenza, ma anche nell' equidistanza o parallelismo, le forze parallele F, f avranno del pari per ri-
3. sultante $\Phi = F \pm f$. Ora quando ME, MI, MN divengono
2. parallele, si ha IV = IK ed VG = SQ (L. 499); dunque essendo $F : f : \Phi :: IK : SQ : IG$ (97) le forze parallele ci daran-
3. no $F : \pm f : \Phi :: IV : VG : IG :: OV : VR : OR$ (L. 558).

103. Volendo pertanto ridurre ad una sola φ le due date forze parallele F, f, condotta tra le lor direzioni una retta qualunque RO, si avrà $F : \Phi :: OV : OR$ (102), onde $OV = \frac{F.OR}{\Phi} = \frac{F.OR}{F \pm f}$, e la parallela ΦV che passa per il punto V, sarà la direzione della cercata risultante Φ. All' incontro volendo risolvere una data forza Φ in due forze a lei parallele, presa ad arbitrio FR parallela a ΦV per direzione d' una forza parimente arbitraria F, sarà $F : f :: VO : VR$ (102), $VO = \frac{F.VR}{f} = \frac{F.VR}{\pm \Phi \mp F}$, e la parallela fO che passa per il punto O sarà la direzione dell' altra forza f.

104. Dunque se nel piano delle tre forze F, f, Φ coincidenti o parallele si prenda un punto fisso qualunque A, e sulle direzioni di esse si conducano da A tre normali, il prodotto della risultante per la sua normale eguaglierà la somma o la differenza dei prodotti di ciascuna delle due forze per la sua normale respettiva. Infatti nelle forze coincidenti che supponendosi riunite tutte in FR, hanno comune la normale AG, poichè $\Phi = F \pm f$ (102), sarà anche $\Phi . AG = F.AG \pm f . AG$; e nelle forze parallele, poichè $\Phi . AG = F.AG \pm f . AG$, e $\Phi . VG = \pm f . IG$ (102), sarà

sarà anche $\Phi (AG + VG) = F.AG \pm f (AG + IG)$, cioè Φ. FIG.
$AV = F . AG \pm f . AI$. 3.

105. Questa proprietà osservabile che si avvera nei casi estremi della massima e minima risultante, non può non avverarsi nei varj casi delle risultanti intermedie. Noi ne abbiamo prevenuta la dimostrazione (L. 669) e sappiamo 1°. che il triangolo descritto col vertice A sulla diagonale
MN eguaglia la somma dei triangoli descritti col vertice 4.
stesso sui lati ME, MI quando A è fuori dell' angolo EMI: 2°. che quando A è in quest' angolo, il triangolo sulla diagonale eguaglia la differenza dei triangoli sui lati: 3°. che quando il punto A è nella diagonale, i due triangoli sui lati sono eguali tra loro. Ora tutti questi triangoli si esprimono generalmente per $MN. \frac{AT}{2}$, $ME . \frac{AX}{2}$, $MI . \frac{AC}{2}$ (L. 601); dunque nei primi due casi $MN . AT = ME . AX \pm MI . AC$, e quindi (96) $\Phi . AT = F . AX \pm f . AC$; e nel terzo caso, quando A è in un punto T della risultante ed $AT = o$, sarà $f . AC = F . AX$. Il prodotto d' una forza Φ per la distanza AT della sua direzione MN da un punto fisso A o anche da una linea fissa o da un piano fisso, si chiama *momento* di questa forza, e il punto, la linea o il piano a cui si riferiscono i momenti, diconsi *centro*, *asse* e *piano dei momenti*.

106. Può dunque generalmente conchiudersi riguardo al centro o punto fisso dei momenti, che *se il centro A, A′ è fuori o dentro dell' angolo EMI, il momento di Φ eguaglia o la somma o la differenza dei momenti di F, f.* Ora immaginando il piano del parallelogrammo delle forze talmente attaccato al centro A, A′ che possa girar solamente intorno a lui, ben si vede che essendo A fuor dell' angolo EMI, le forze F, f applicate ai punti X, C, tendono a far girare per una medesima parte il piano col sistema di tutte le linee che v' si trovano, mentre essendo A dentro l' angolo EMI, le forze F, f applicate ai punti X′, C′, tendono a farlo girare in parti diverse: onde ridu-

FIG.

cendo un sistema qualunque di forze alle due F, f (99), può dirsi con maggiore universalità che *il momento della risultante di un numero* n *di forze eguaglia la somma dei momenti di quelle che tendono a far girare il sistema per una parte, meno la somma dei momenti di quelle che tendono a farlo girar per un' altra*.

107. Lo stesso si avvera riguardo all' asse dei momenti,
5. e 6. se le forze son parallele; poichè unite le direzioni delle forze con una normale AIVG e condotto per un centro A dei momenti l' asse qualunque AO sopra cui si faccian cader le parallele IM, VN, GO, si avrà (L. 554) AG : AI : AV :: GO : IM : VN, ed $F \times AG : f \times AI : \Phi \times AV :: F \times GO : f \times IM : \Phi \times VN$; ma $F \times AG \pm f \times AI = \Phi \times AV$ (106); dunque anche $F \times GO \pm f \times IM = \Phi \times VN$. E dopo ciò facilmente può estendersi il teorema al caso di AG obliqua alle direzioni di F, f, Φ.

108. Infine la medesima proprietà può dimostrarsi anche riguardo al piano dei momenti, supposto sempre che le forze sieno parallele; poichè se le forze sono un numero n, si cercherà la risultante Φ delle due prime A, B (103), la risultante Φ' della terza C e di Φ, la risultante Φ'' della quarta D e di Φ' ec.; quindi si applicherà ad A, B, Φ, a C, Φ, Φ', a D, Φ', Φ'' ec. il passato raziocinio (107) e si avrà il teorema solito (106). Anzi potrebbe dimostrarsi che questo teorema ha luogo egualmente per delle forze anche non parallele, e anche non situate in un medesimo piano purchè ciascuna di esse fosse prima risoluta in tre altre respettivamente parallele a tre rette perpendicolari tra loro in un medesimo punto, il che non ha difficoltà: ma tanto basti sulla natura della prima formula.

109. II°. La seconda $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos x)} = MN = o$ è manifestamente un minimo; e poichè non può essere $MN = o$ se l' angolo $MEN = x$ non sia infinitesimo o nullo, nè tale diventa se EN non giri in dentro e cada sopra EM, è evidente 1°. che essendo $x = o$, si avrà $\cos x = 1$ (L. 692): 2°. che cadendo EN sopra EM e perciò la forza parallela

MI formando una sola retta con EM, l' azione delle due forze MI, ME sarà contraria. Dunque l' equazione $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos x)} = o$ si cangia in $a^2 + b^2 - 2ab = o$, il che dà $a - b = o$ ovvero $a = b$, e le forze $ME = a = F$, FIG. 5. e 6.
$MI = b = f$ sono eguali nel tempo stesso ed opposte; cosicchè non producendo alcun moto perchè la loro risultante $MN = o$, costituiscono ciò che si chiama *equilibrio*: onde può dirsi che *quando la risultante di più forze è zero, esse sono in equilibrio*, e reciprocamente *quando si ha l' equilibrio tra più forze, la loro risultante dee essere zero*.

110. Quindi riguardando un solido D come un ammasso di molecule collegate e pesanti, o come un sistema di 7.
forze parallele che tendono a farlo scender verticalmente (42), la sua quiete indicherà che quelle forze son bilanciate dalla forza contraria del filo FD, e che la risultante di tutte insieme è zero; ma la forza FD sostiene un sol punto del solido D, dunque le forze parallele a cui FD si oppone, agiscono per mezzo della lor risultante in un sol punto; dunque questo punto può sostituirsi al solido stesso D o al sistema dei piccoli solidi onde D è composto, e si può chiamare il centro di tutte le molecule gravitanti ovvero il *centro di gravità* del sistema; cosicchè il centro di gravità è quel punto, sostenuto il quale, i corpi o molecule d' una parte fanno equilibrio ai corpi o molecule dell' altra, e tutto il sistema riposa.

111. Sieno pertanto due solidi A, M uniti insieme nei loro particolari centri di gravità con la verga inflessibile AM, e sia L il centro di gravità del sistema; sarà dunque $A \cdot g$ la forza del corpo A, ed $M \cdot g$ quella del corpo M (44), e la risultante di queste forze passerà per L (110). Perciò preso L per punto fisso (104) si avrà $Ag \times AL = Mg \times ML$ (105), ovvero A : M :: ML : AL, cioè 1°. *due masse sono in ragione inversa delle lor distanze dal centro comune di gravità*, principio fondamentale dell' equilibrio di cui ci serviremo altrove: 2°. *il centro comune di gravità di due masse si ha dividendo in ragione inversa di queste masse la li-*

FIG. *nea che unisce i loro particolari centri di gravità*, principio fondamentale del centro di gravità di cui daremo quì
7. brevemente le formule più necessarie, supposto però che le masse dei corpi M, m sieno omogenee cioè d' una medesima densità; nel qual caso avendosi $D = d$ e d' altra parte (10) $D : d :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$, sarà $\frac{M}{V} = \frac{m}{v}$ onde $M : m :: V : v$, e potranno sostituirsi alle masse i lor volumi o dimensioni geometriche.

8. 112. Vogliasi primieramente il centro di gravità d' una linea AVE di cui si ha l' equazione per mezzo delle coordinate Ag, gE. Sia Ee un elemento di AVE e si avranno due masse o volumi AVE, Ee: il centro di gravità di Ee infinitesima può supporsi in E, e preso N per il centro cercato di AVE, sarà EN la retta che unisce i particolari centri E, N dei volumi AVE, Ee; onde se sia n il comun centro del sistema, si avrà AVE : Ee :: En : nN (111) ed nN sarà infinitesima come Ee. Condotte ad AB dai punri N, n, E la parallela NR ad Ag e le normali NN′, nn', EI, e posta $AI = x$, $IE = y$, $AN' = z$, $N'N = IR = u$, $AVE = s$, $Ee = ds$, avremo $N'n' = Nh = dz$, $N'I = NR = x - z$, $hn = du$, $RE = y - u$, e quindi AVE (s) : Ee (ds) :: En [= EN (L. 268)] : Nn :: RN ($x - z$) : Nh (dz) :: RE ($y - u$) : hn (du); dunque $sdz = xds - zds$, ed $sdu = yds - uds$, ovvero $sdz + zds = xds$, ed $sdu + uds = yds$; onde integrando, $sz = \int xds$ ed $su = \int y\,ds$. Dunque infine $z = AN' = \frac{\int xds}{s}$ ed $u = N'N = \frac{\int yds}{s}$, formule che determinano il cercato centro N di gravità e nelle quali, come nelle seguenti, non ha luogo la Costante, perchè tutte svaniscono se sia $x = 0$.

Onde avendosi $N'N = \frac{\int yds}{s}$, sarà anche $2\pi N'N = \frac{2\pi \int yds}{s}$, ovvero $2\pi \int yds = s \cdot 2\pi N'N$: ma $2\pi \int yds$ esprime la

superficie curva d' un solido di rivoluzione (L. 1127.); dunque *se quante linee si voglia rette o curve* AEB, AEL, *ec.* FIG.
situate da una stessa parte dell' asse AB, *girino intorno ad* AB, *la superficie generata dalla rivoluzione eguaglia sempre la somma delle linee generatrici moltiplicata per la circonferenza descritta dal loro comun centro di gravità*. 8.

113. Applicazioni. I. Sia AVE la linea retta AI; dunque $u = 0$, $s = x$, e $z = AN' = \frac{\int udx}{x} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} = \frac{AI}{2}$, cioè il centro di gravità è nel mezzo della retta AI. Onde il contorno di un poligono regolare ha il centro di gravità nell' intersezion di due rette, che o da due angoli se i lati sono impari, o dal mezzo di due lati se i lati son pari, si conducano al mezzo dei lati opposti.

114. II. Sia AVE un arco di circolo dell' equazione $y^2 = 2ax - x^2$. Diviso in mezzo l' arco col raggio TV, è chiaro che essendo eguali e simili gli archi AV, VE, il loro comun centro *di gravità*, *cioè il centro dell' arco* AVE, dee essere in qualche punto N del raggio TV. Ora i triangoli rettangoli IEA, N′TN che hanno l' angolo E = T (L. 505) son simili, e perciò IA (x) : AE ($\sqrt{2ax}$) :: N′N $\left(\frac{\int yds}{s}\right)$: $TN = \frac{\sqrt{2ax}}{sx}\int yds$: ma $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (L. 1026) $= \frac{adx}{y}$ (L. 1027); dunque $TN = \frac{\sqrt{2ax}}{sx}\int \frac{aydx}{y} = \frac{\sqrt{2ax}}{sx} \times ax = \frac{a\sqrt{2ax}}{s}$; dunque il centro di gravità d' un arco di circolo è nel raggio che lo divide in mezzo, e la sua distanza TN dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l' arco s, il raggio a e la corda $\sqrt{2ax}$.

115. Vogliasi in secondo luogo il centro di gravità d' una superficie piana AVEI delle cui coordinate si ha l' equazione. Sia Ie un elemento di AVEI e si avranno i due volumi AVEI, Ie: il centro di Ie infinitesima può supporsi in S nel mezzo di IE (113) e preso O per il centro cercato di AVEI, sarà SO la retta che unisce i particolari

FIG. 8.

centri S, O; onde se sia t il comun centro del sistema, si avrà AVEI : Ie :: St : tO. Condotte come sopra (112), le ON′, tn', OP e fatta $AN' = z$, $N'n' = Oq = dz$, $N'O = IP = u$, $qt = du$, $AI = x$, $Ii = dx$, $IE = y$; avremo $IN' = PO = x - z$, $SI = \frac{y}{2}$, $PS = \frac{y}{2} - u$; l' area $AEI = \int ydx = s$, e l' elemento $Ie = ydx = ds$ (L. 1115): sarà dunque AEI (s) : Ie (ds) :: St $(= SO)$: Ot :: PO $(x - z)$: Oq (dz) :: PS $\left(\frac{y}{2} - u\right)$: qt (du); e quindi pur come sopra (112), $z = AN' = \frac{\int xds}{s} = \frac{\int xydx}{\int ydx}$, ed $u = N'O = \frac{\int yds}{2s} = \frac{\int y^2 dx}{2\int ydx}$ formule che determinano il cercato centro O di gravità.

Onde avendosi $N'O = \frac{\int y^2 dx}{2\int ydx}$, sarà $\pi . N'O = \frac{\pi \int y^2 dx}{2\int ydx}$ ovvero $2\pi N'O \int ydx = \pi \int y^2 dx$: ma $\pi \int y^2 dx$ esprime un solido di rivoluzione (L. 1125); dunque *se quante figure si voglia, situate nello stesso piano e dalla parte stessa dell' asse* AB, *girino intorno ad* AB, *il solido generato eguaglierà la somma delle figure genitrici moltiplicate per la circonferenza che è descritta dal loro comun centro di gravità.*

116. Applicazioni. I. Sia AVEI un triangolo; dunque sarà data la ragion de' suoi lati AI, IE, e si avrà, per esempio, AI (x) : IE (y) :: $m : n$ onde $y = \frac{nx}{m}$; dunque $AN' = \frac{\int nx^2 dx}{\int nxdx} = \frac{2nx^3}{3nx^2} = \frac{2x}{3}$ ed $N'O = \frac{\int n^2 x^2 dx}{2m\int nxdx} = \frac{n^2 x^3}{3mnx^2} = \frac{nx}{3m} = \frac{y}{3}$, cioè il centro cercato si determina prendendo $AN' = \frac{2}{3}AI$ e conducendo parallela ad IE la retta $N'O = \frac{1}{3}IE$. Onde divisa in triangoli una figura qualunque rettilinea, il suo centro di gravità sarà il comun centro di

FIG. 8.

tutti questi triangoli. Quello dei poligoni regolari coincide con quello del loro contorno (113); e se condotte da A, E due parallele ad IE, IA, si formasse un parallelogrammo, sarebbe y costante: onde $AN' = \frac{y\int xdx}{y\int dx} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$, ed $N'O = \frac{y^2\int dx}{2y\int dx} = \frac{y^2}{2y} = \frac{y}{2}$, cioè il centro di gravità d' un parallelogrammo è nel mezzo di esso.

117. II. Sia AVEI una parabola dell' equazione $y^2 = px$; dunque $dx = \frac{2ydy}{p}$ e perciò $AN' = \frac{\int 2y^4 dy}{p\int 2y^2 dy} = \frac{3y^2}{5p} = \frac{3x}{5}$, ed $N'O = \frac{\int 2y^3 dy}{2\int 2y^2 dy} = \frac{3y^4}{8y^3} = \frac{3y}{8}$, cioè il centro cercato si determina prendendo $AN' = \frac{3}{5}AI$ e conducendo parallela ad IE la retta $N'O = \frac{3}{8}IE$.

118. Vogliasi in terzo luogo il centro di gravità d' una superficie. Quella d' un prisma lo ha visibilmente nel mezzo della linea retta che descrive il centro di gravità del contorno della base, mentre ella per formare il solido sale parallelamente a se stessa (L. 631).

Sia dunque una superficie curva prodotta dalla rivoluzione della linea AVE intorno all' asse AI. E' chiaro che il centro dee essere nell' asse AI (114). Sia Ee un elemento di AVE e si avranno due volumi, l' uno generato da AVE, l' altro da Ee; il centro di gravità della zona infinitesima prodotta da Ee può supporsi in I, e preso N′ per centro della superficie nata da AVE, sarà IN′ la retta che unisce i particolari centri I, N′: onde se sia n' il comun centro del sistema, ritenute le denominazioni di sopra (115), avremo *superf.* AVE $(2\pi\int yds = u)$: *superf.* Ee $(2\pi yds = du)$ (L. 1127) :: In' $(= IN' = x - z)$: $n'N'$ (dz), e però $udz =$

FIG. $xdu - zdu$ ovvero $udz + zdu = xdu$, ed integrando; $uz =$

8. $\int xdu$ onde $z = AN' = \frac{\int xdu}{u} = \frac{\int xyds}{\int yds}$.

119. Applicazioni. I. Sia AVE una retta che generi la superficie curva del cono retto, e sia l'angolo IAE $= b$; dunque IE $= y = x \tang b$ (L. 755), AE $= s = \frac{x}{\cos b}$ (L. 756), e $ds = \frac{dx}{\cos b}$: onde AN' $= \frac{\int x^2dx}{\int xdx} = \frac{2x^3}{3x^2} = \frac{2x}{3}$, cioè il centro cercato si determina prendendo AN' $= \frac{2}{3}$ AI.

120. II. Sia AVE un arco di circolo che generi la superficie curva del segmento sferico; dunque $ds = \frac{adx}{y}$ (L. 1027) ed AN' $= \frac{\int axdx}{\int adx} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2}$, cioè il centro di gravità si determina prendendo AN' $= \frac{AI}{2}$.

121. Vogliasi infine il centro di gravità d'un solido. I prismi lo hanno manifestamente nel mezzo della linea retta che descrive il centro di gravità della base mentre ella sale parallelamente a se stessa per formare il solido (L. 631).

Sia dunque un solido prodotto dalla rivoluzione della superficie AVEI intorno all'asse AI. Supposto tutto come nel passato problema, sarà *solid.* AVE ($\pi\int y^2dx = u$): *solid.* Ee ($\pi y^2dx = du$) (L. 1125) :: $x - z : dz$, e però $z = AN' = \frac{\int xdu}{u} = \frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx}$.

122. Applicazioni. I. Sia AVEI un triangolo, onde il solido sia un cono retto; dunque IE $= y = x \tang b$ come sopra, e però AN' $= \frac{\int x^3dx}{\int x^2dx} = \frac{3x^4}{4x^3} = \frac{3x}{4}$, cioè il centro si de-

si determina prendendo AN' $= \frac{3}{4}$ AI.

Onde il centro di gravità dei solidi piramidali è ai tre 8.
quarti della distanza AI, contati dal vertice A: e poichè i poliedri si dividono in piramidi (L. 651) anche il loro centro di gravità si troverà facilmente, almeno per approssimazione.

123. II. Sia AVEI un semisegmento di circolo onde il solido sia un segmento sferico; dunque $y^2 = 2ax - x^2$, ed

$$AN' = \frac{\int(2ax^2dx - x^3dx)}{\int(2axdx - x^2dx)} = \frac{8ax - 3x^2}{12a - 4x}.$$

124. Considerando ora le masse gravitanti dei corpi come forze, e il comun centro di gravità di quelle come la risultante di queste, potrebbe applicarsi quì tutta la dottrina dei momenti già spiegata di sopra (108 ec.): ma eccone la dimostrazione per i suoi proprj principj.

I°. Per C comun centro di gravità di due corpi M, m 9.
passi il piano PQ a cui si conducano le normali AQ, BP; si avrà dunque (L. 519. 554) QA : BP :: AC : BC :: m : M (111); dunque M . QA $= m$. BP.

II°. Sia P'Q' un piano fuori del centro C e di là dai corpi M, m, e condotte ad esso le normali AQ', BP', si immagini per C il piano PQ parallelo a P'Q', e si prolunghi P'B in P; si avrà dunque QQ' $=$ CR $=$ PP' e perciò M $\times$ QQ' $+ m$. PP' $=$ (M $+ m$) CR: ma QQ' $=$ Q'A $-$ QA, PP' $=$ P'B $+$ PB; dunque M . Q'A $-$ M . QA $+ m$. P'B $+ m$. PB $=$ (M $+ m$) CR: ma M . QA $= m$. PB (124); dunque M . Q'A $+ m$. P'B $=$ (M $+ m$) CR.

III°. Sia P''Q'' un piano fuori del centro C e tra i corpi M, m. Ripetuta la costruzione passata si avrà QQ'' $=$ CS $=$ PP'', onde M . QQ'' $+ m$. PP'' $=$ (M $+ m$) CS: ma QQ'' $=$ QA $-$ Q''A, PP'' $=$ P''B $-$ PB, ed M . QA $= m$. PB (124); dunque m . P''B $-$ M . Q''A $=$ (M $+ m$) CS.

125. Dunque se in qualsivoglia figura o solido geometrico si conduca comunque per il suo centro C di gravità

FIG. 9 un asse o un piano PQ (suol chiamarsi l'*asse* o il *piano di equilibrio*), i due segmenti S, s in cui resta divisa la figura o il solido, si equilibreranno tra loro: poichè trovati nei segmenti S, s i loro particolari centri M, m di gravità, i quali necessariamente saranno in retta linea con C, si è visto che i momenti di M, m e perciò anche quelli dei segmenti S, s si egualieranno (124. I.).

126. Possono estendersi questi teoremi ad un numero qualunque di corpi. Sia C il comun centro di gravità dei
10. tre corpi M, m, μ (supposto K quello dei primi due) e si concepiscano i soliti piani LN, L'N', L''N'' con le rispettive normali come sopra, e con l'altre quattro KV, TF, T'F, T''F: ciò fatto

I°. Se LN passi per C, si avrà $M \,.\, ND + m \,.\, LE = (M + m)\, VK$ (125): ma il peso $M + m = K$ (110), onde $M + m : \mu :: CF : CK$ (111) $:: TF : VK$ (L. 554) ed $(M + m)\, VK = \mu \,.\, TF$; dunque $M \,.\, ND + m \,.\, LE = \mu \,.\, TF$.

II°. Se L'N' sia fuori del centro C e di là dai corpi M, m, μ, si avrà $M \,.\, NN' + m \,.\, LL' + \mu \,.\, TT' = (M + m + \mu)\, CR$: ma $NN' = N'D - ND$, $LL' = L'E - LE$, $TT' = T'F + TF$; dunque $M \,.\, N'D - M \,.\, ND + m \,.\, L'E - m \,.\, LE + \mu \times T'F + \mu \,.\, TF = (M + m + \mu)\, CR$: ma $M \,.\, ND + m\, LE = \mu \,.\, TF$ (127); dunque $M \,.\, N'D + m \,.\, L'E + \mu \,.\, T'F = (M + m + \mu)\, CR$.

III°. Se L''N'' sia tra il centro e i corpi, si avrà $M \times NN'' + m\, LL'' + \mu \,.\, TT'' = (M + m + \mu)\, CS$: ma $NN'' = N''D - ND$, $LL'' = L''E - LE$, $TT'' = TF - T''F$ ed $M \times ND + m \,.\, LE = \mu \,.\, TF$ (127); dunque $M \,.\, N''D + m \,.\, L''E - \mu \,.\, T''F = (M + m + \mu)\, CS$; ec.

127. Dal detto fin quì si può dedurre 1°. che se un sistema (comunque composto di corpi liberi o legati tra loro) sia messo in movimento da più forze eguali, parallele e dirette nel modo stesso, anche il comun centro di gravità per cui passa la risultante di tutte le forze (110), si moverà parallelamente ad esso e con egual celerità e direzione: 2°. che se in un sistema di corpi tra loro uniti, il comun centro di gravità sia urtato da una o più forze, tutti i corpi si moveranno in direzioni parallele alla sua, e con una celerità comune che si avrà dividendo per la total massa del sistema la quantità di moto impressa nel centro (21).

FIG. 10.

(128) Anzi quando pure i corpi M, m, μ ec. si movessero uniformemente per le parallele DN', EL', FT' ec., ma con diverse celerità K, K', K'' ec., il comun centro C di gravità non lascierebbe di andar per la parallela CR con un movimento uniforme e con una quantità di moto eguale alla somma di tutti i moti parziali. Infatti

I. *Se* più piani passino per la parallela CR i momenti dei corpi M, m, μ ec. riferiti a questi piani, saranno gli stessi in ciascun punto del moto, attesa l'equidistanza di questi punti da CR: ora in C la somma dei momenti è zero (126. I.); dunque sarà zero in ciascun punto del moto; dunque il centro di gravità si trova sempre in qualunque dei piani che passano per CR; dunque è nella comune intersezione CR di tutti;

II. Nel principio del moto si ha $(M + m + \mu)\, CR = M \,.\, N'D + m \,.\, L'E + \mu \,.\, T'F$ (126. II.), e quando i corpi dopo un tempo t hanno trascorsi degli spazj $DN = Kt$, $EL = K't$, $FQ = K''t$ e il centro C è giunto da C in S, si ha $(M + m + \mu)\, SR = M \,.\, N'N + m \,.\, L'L + \mu \,.\, T'Q$; dunque sottratta questa dalla prima equazione e poi riducendo e sostituendo, verrà $CS = \frac{(MK + mK' + \mu K'')\,t}{M + m + \mu}$: ma $MK + mK' + \mu K''$ esprime la forza o moto di tutti i corpi (19), e perciò $\frac{MK + mK' + \mu K''}{M + m + \mu}$ è la celerità del centro C (21); dunque poichè lo spazio CS da lui trascorso, ne eguaglia la celerità nel tempo t, il moto di C è necessariamente uniforme (27).

III. La celerità del centro C è $\frac{MK + mK' + \mu K''}{M + m + \mu}$; dunque il suo moto sarà (19) $\frac{(MK + mK' + \mu K'')(M + m + \mu)}{M + m + \mu} =$

FIG
$MK + mK' + \mu K''$, cioè eguaglierà la somma dei moti
10. di tutti i corpi. Bisogna però sempre sottrarre al solito (106) quei movimenti che si fanno in senso contrario agli altri, ciò che talvolta può rendere immobile il centro C benchè il sistema si muova.

129. Infine se i corpi liberi d' un sistema fossero mossi con direzioni oblique qualunque, si risolverebbe ciascuna forza in tre altre respettivamente parallele a tre rette perpendicolari tra loro (108), e i tre moti paralleli a queste tre rette si sostituirebbero al moto di ciascun corpo: allora il centro di gravità si moverebbe come se tutte le potenze parallele alle tre rette gli fossero immediatamente applicate (128. III.); onde componendo i tre movimenti, si avrebbe il suo movimento e la sua via. Potrebbe dimostrarsi lo stesso nel caso ancora che i corpi del sistema fossero uniti tra loro: ma basti averlo accennato.

Moto per le Trajettorie.

130. Fin quì considerammo due forze omogenee. Sieno
11. ora le due forze eterogenee F, *f* che agiscano con le direzioni ME, MI sul corpo M; dunque non avrà più luogo nè la costruzione di sopra (95) nè l' analogia NI : IM :: KR : RM che se ne dedusse; dunque i punti M, K, L, N non son più in linea retta, e perciò il corpo M descrive una curva MKLN che dicesi *Trajettoria*, la cui natura e determinazione dipende dalla legge con cui agiscono le due forze combinate.

Di queste due forze l' una F suol supporsi momentanea e l' altra *f* continuata, sia ella costante o sia variabile. La prima F si chiama *projettile* o *tangenziale* perchè la sua direzione è sempre per la tangente della curva (14); la seconda *f* si chiama *centrale* perchè si riporta ad un punto fisso o centro C per avvicinarvi o par allontanarne il corpo: se tende ad avvicinarlo è *centripeta*, se ad allontanarlo è *centrifuga*. Alcuni chiamano generalmente centrali le due forze F, *f* e ciò può farsi purchè la tangenziale non si

confonda con la centrifuga che ne differisce come la parte FIG.
dal tutto, nè si prendano quasi una cosa stessa la centrifuga e la centripeta, le quali oltre che agiscono oppostamente, come si è detto, sono anche diverse in quantità, e solamente nel circolo si eguagliano come vedremo. Le rette
CM, CL che dal centro o *fuoco* C vanno a qualche punto 11.
della trajettoria, diconsi *raggi vettori*.

131. Quì però si osservi che l' idea completa delle trajettorie non comprende già le sole curve, ma abbraccia anche la linea retta. Poichè se la forza momentanea F spinga il corpo per ME, e sia ME un piano materiale e parallelo all' orizzonte, l' azione della forza centrale interamente impedita diverrà nulla, e la trajettoria si ridurrà alla retta orizzontale ME: se il corpo M sia colpito dalla forza momentanea nella direzione MC della forza centrale, o se mancando l' impulso della prima, sia egli animato solamente dalla seconda, è chiaro che la trajettoria si ridurrà al raggio vettore MC. Di queste due trajettorie abbiamo già sott' altro aspetto bastantemente parlato, giacchè insomma sono esse le linee che con moto uniforme, ed uniformemente accelerato vengon descritte dal mobile: ma se il piano materiale ME si inclini all' orizzonte e scenda in MN, qual trajettoria descriverà il corpo M spinto dalla forza momentanea per la direzione medesima di MN? E' chiaro che sarà la stessa MN; ella ha però delle proprietà notabili, e da questo caso più semplice comincieremo a considerar le trajettorie.

132. Sia il piano inclinato ABD la cui lunghezza AD =
λ, l' altezza AB = *a*, e scenda sopra di lui un mobili che 8.
abbia il centro di gravità in C. Condotta per C la verticale CG rappresentante la solita forza *g* di gravità (44) e risolutala nelle due forze C*p* normale e CH parallela ad AD (99), è manifesto che C*p* (suppongo che C*p* passi per la base o *effettiva* o *virtuale* del mobile) premendo il piano AD ed essendo impedita da lui, non contribuisce alla discesa del mobile C, che perciò scenderà con la sola forza CH

8. $=\gamma$, che chiamasi la *forza relativa di gravità*. Dunque $g : \gamma :: CG : CH$, e poichè i triangoli simili ABD, CHG (L. 519. 500.) danno $CG : CH :: DA : AB :: \lambda : a$, avremo $g : \gamma :: \lambda : a$ e $\gamma = \frac{ag}{\lambda}$ espressione in cui tutto è costante (43); dunque lo sarà anche γ, e però il mobile C scorrerà per il piano inclinato AD con moto uniformemente accelerato all' ingiù o ritardato all' insù (8).

133. Poichè $\gamma = \frac{ag}{\lambda}$, se nelle quattro primitive equazioni (44. 72) del moto uniformemente accelerato e ritardato (la quinta diviene inutile perchè si ha da essa con più date ciò che dall' altre si ha con meno) pongasi κ, θ, λ, $\frac{ag}{\lambda}$ in luogo di c, t, s, g, si avranno otto equazioni con le quali può formarsi al solito la doppia seguente

TAVOLA I.

Per il moto uniformemente accelerato nei Piani inclinati.

	Date	si ha	Formule
134.	κ, g, p	a	$a = \frac{\kappa^2 - p^2}{2g}$
135.	$\kappa, g, \lambda, \theta$		$a = \frac{2\lambda}{g\theta}\left(\kappa - \frac{\lambda}{\theta}\right)$ *
136.	g, λ, p, θ		$a = \frac{2\lambda}{g\theta}\left(\frac{\lambda}{\theta} - p\right)$
137.	a, g, p	κ	$\kappa = \sqrt{(2ag + p^2)}$
138.	a, g, λ, θ		$\kappa = \frac{ag\theta}{2\lambda} + \frac{\lambda}{\theta}$ *
139.	λ, p, θ		$\kappa = \frac{2\lambda}{\theta} - p$
140.	a, κ, p	g	$g = \frac{\kappa^2 - p^2}{2a}$
141.	$a, \kappa, \lambda, \theta$		$g = \frac{2\lambda}{a\theta}\left(\kappa - \frac{\lambda}{\theta}\right)$ *
142.	a, λ, p, θ		$g = \frac{2\lambda}{a\theta}\left(\frac{\lambda}{\theta} - p\right)$

	Date	si ha	Formule
143.	a, κ, g, θ	λ	$\lambda = \frac{\theta[\kappa + \sqrt{(\kappa^2 - 2ag)}]}{2}$ *
144.	a, g, p, θ		$\lambda = \frac{\theta[p + \sqrt{(2ag + p^2)}]}{2}$
145.	κ, p, θ		$\lambda = \frac{\theta(\kappa + p)}{2}$
146.	a, κ, g	p	$p = \sqrt{(\kappa^2 - 2ag)}$. *
147.	a, g, λ, θ		$p = \frac{\lambda}{\theta} - \frac{ag\theta}{2\lambda}$ *
148.	κ, λ, θ		$p = \frac{2\lambda}{\theta} - \kappa$ *
149.	a, κ, g, λ	θ	$\theta = \frac{\lambda[\kappa + \sqrt{(\kappa^2 - 2ag)}]}{ag}$ *
150.	a, g, λ, p		$\theta = \frac{\lambda[-p + \sqrt{(2ag + p^2)}]}{ag}$
151.	κ, λ, p		$\theta = \frac{2\lambda}{\kappa + p}$

TAVOLA II.

Per il moto uniformemente ritardato nei Piani inclinati.

	Date	si ha	Formule
152.	χ, g, p	a	$a = \frac{p^2 - \chi^2}{2g}$
153.	χ, g, λ, τ		$a = \frac{2\lambda}{g\tau}\left(\frac{\lambda}{\tau} - \chi\right)$
154.	g, λ, p, τ		$a = \frac{2\lambda}{g\tau}\left(p - \frac{\lambda}{\tau}\right)$
155.	a, g, p	χ	$\chi = \sqrt{(p^2 - 2ag)}$
156.	a, g, λ, τ		$\chi = \frac{\lambda}{\tau} - \frac{ag\tau}{2\lambda}$
157.	λ, p, τ		$\chi = \frac{2\lambda}{\tau} - p$

	Date	si ha	Formule
158.	a, χ, p	g	$g = \frac{p^2 - \chi^2}{2a}$
159.	a, χ, λ, τ		$g = \frac{2\lambda}{a\tau}\left(\frac{\lambda}{\tau} - \chi\right)$
160.	a, λ, p, τ		$g = \frac{2\lambda}{a\tau}\left(p - \frac{\lambda}{\tau}\right)$
161.	a, χ, g, τ	λ	$\lambda = \frac{\tau\,[\chi + \sqrt{(\chi^2 + 2ag)}]}{2}$
162.	a, g, p, τ		$\lambda = \frac{\tau\,[p + \sqrt{(p^2 - 2ag)}]}{2}$
163.	χ, p, τ		$\lambda = \frac{\tau}{2}(\chi + p)$
164.	a, χ, g	p	$p = \sqrt{(2ag + \chi^2)}$
165.	a, g, λ, τ		$p = \frac{ag\tau}{2\lambda} + \frac{\lambda}{\tau}$
166.	χ, λ, τ		$p = \frac{2\lambda}{\tau} - \chi$
167.	a, χ, g, λ	τ	$\tau = \frac{\lambda\,[-\chi + \sqrt{(2ag + \chi^2)}]}{ag}$
168.	a, g, λ, p		$\tau = \frac{\lambda\,[p + \sqrt{(p^2 - 2ag)}]}{ag}$
169.	χ, λ, p		$\tau = \frac{2\lambda}{\chi + p}$

E' superfluo l'avvertire che con queste Tavole si troveranno nel moto per i piani inclinati tutte le proprietà già osservate nell' uniformemente accelerato e ritardato (65..93): solo diremo che esse fanno conoscere tutte le relazioni tra i moti per due piani diversi. Se per esempio, si vogliano le celerità di due mobili che sono scesi liberamente per due diversi piani inclinati, sarà $p = 0$ ed essendo data la sola diversa inclinazione dei piani o la loro altezza, avremo (137) $x : x' :: \sqrt{2ag} : \sqrt{2a'g} :: \sqrt{a} : \sqrt{a'}$, cioè le celerità finali sono come le radici dell'altezze dei piani ec. Ma ecco delle Applicazioni più interessanti.

170. I. Trovar la ragione delle celerità che acquisterebbe un mobile trascorrendo AB ed AD. Si avrà dunque in D la celerità $x = \sqrt{2ag}$ (137): ma in B si ha la celerità $c = \sqrt{2gs}$ (45), perchè in avvenire suppongo sempre $p = 0$ nella I. Tavola; dunque $x : c :: \sqrt{a} : \sqrt{s}$: ma quì $s = a$ giacchè lo spazio verticale AB è l'altezza stessa del piano; dunque $\sqrt{a} = \sqrt{s}$ e però $c = x$, cioè il mobile ha la stessa celerità in D ed in B. 8.

171. D'onde segue 1°. che se il mobile scenda per una curva ABCD cioè per una serie infinita di piani infinitesimi ed infinitamente inclinati AB, BC ec., la sua celerità nei punti B, C, D sarà eguale alla celerità che avrebbe nei punti I, K, D dopo aver trascorse l'altezze verticali LI, LK, LD. Infatti descritto col raggio DC l'arco infinitesimo CG, e condotta la normale CH $=$ *sen* CDH $=$ *sen* $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}$, la forza DC sarà risoluta nelle due DK, DH delle quali la DK si perde tutta nel percuotere il piano HE, e resta al mobile la sola DH: onde poichè CD $=$ DG e DG $-$ DH $=$ HG, la forza perduta in D sarà HG. Ora (L. 563) GD $+$ DH : HC $\left(\frac{1}{\infty}\right)$ :: HC $\left(\frac{1}{\infty}\right)$: HG $= \frac{1}{\infty^2\,(GD + DH)}$; dunque perdendosi un infinito numero di forze HG nella scesa per gli infiniti piani AB, BC ec., la forza totale perduta lungo la curva sarà $\infty\,HG = \frac{\infty}{\infty^2\,(GD + DH)} = \frac{1}{\infty\,(GD + DH)} = 0$ (L. 266. 267.), cioè la perdita sarà nulla, e il corpo avrà in B la forza o celerità stessa che avrebbe dopo aver trascorsa LI, in C la stessa che acquisterebbe per LK, in D la stessa che avrebbe dopo essere sceso per LD (170). 7.

172. Dunque 2°. come in virtù della celerità finale il corpo sceso per LD risalirebbe in egual tempo al punto L (93), così se dopo avere scorso l'arco ABCD incontri in D il concavo della stessa o d' un' altra curva qualunque, si inalzerà per essa in egual tempo fino al punto M, cioè ad una altezza eguale a quella da cui partì. Onde un *pendolo sem-*

FIG.

plice, o un filo inflessibile e molto leggiero FD con un peso D nella sua estremità assai grave e poco voluminoso,
7. movendosi liberamente intorno al punto fisso F, giunto che sia da A in D per l'arco ABCD, salirà in egual tempo per un arco egualmente alto DM, e da M tornerà nuovamente in A: cosicchè, tolti gli ostacoli, le sue *oscillazioni* ADM, MDA durerebbero perpetuamente.

8. 173 II. Data l'altezza AB d'un piano inclinato ABD, trovar nella sua lunghezza AD il punto E tale che un mobile partendosi da A trascorra in tempo eguale l'inclinata AE e la verticale AB. Condotta EI parallela alla base BD, sia $AE = x$, $AD = \lambda$, $AB = a = s$, spazio trascorso dal mobile verticalmente cadente; e poichè DA : AE :: BA : AI (L 553.), sarà $AI = \frac{sx}{\lambda}$. Avendosi dunque nel piccolo piano inclinato AIE la lunghezza $AE = \lambda' = x$ e l'altezza $AI = a' = \frac{sx}{\lambda}$, il tempo impiegato nel trascorrere AE sarà (150) $\theta' = \lambda' \sqrt{\frac{2}{a'g}} = x\sqrt{\frac{2}{\frac{gsx}{\lambda}}} = \sqrt{\frac{2\lambda x}{gs}}$: ma il tempo impiegato per AB è $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ (64) e per ipotesi dee esser $\theta' = t$; dunque $\sqrt{\frac{2\lambda x}{gs}} = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ ed $x = \frac{s^2}{\lambda}$: onde alzata BE normale ad AD, sarà E il punto cercato, perchè DA : AB :: AB : AE (L. 559), cioè $\lambda : s :: s : x = AE$.

174. Dunque se sull'altezza AB di due o più piani inclinati AD, AK si descriva un circolo, il mobile trascorrerà il diametro AB nel tempo stesso in cui trascorrerebbe qualunque delle corde AE, AL, ec., perchè BE, BL ec. son normali ai piani (L 505.): onde anche le corde AE, AL, BE, BL ec. saranno trascorse in tempi eguali.

175. Parrebbe potersi inferir di quì che l'oscillazioni d'un pendolo semplice che descrive dei piccoli archi di 4° o di 5°, sono sensibilmente *isocrone* o di egual durata, giac-

FIG.

chè il moto per le corde è isocrono e le corde molto piccole si confondono sensibilmente coi loro archi: ma questa confusione di corde e di archi che ha luogo in Geometrìa ove si parla di lunghezze, non lo ha certamente in Meccanica ove si tratti di tempi; e si prova anzi che il moto è più tardo per la corda AD che per l'arco ABCD;
onde l'*isocronismo* delle piccole oscillazioni MDA, NDO 7.
si dimostrerà così. Preso A per principio della discesa, sia $DL = m$, $DF = r$, e supposti gli archi BD, CD infinitamente vicini, sia $DI = x$, $IK = -dx$ (L. 984), l'arco $AB = s$ e $BC = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{-r dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$ (L. 1027) $= \frac{-r dx}{\sqrt{2rx}}$ giacchè per ipotesi DL e perciò anche DI son piccolissime. Dunque (45) il pendolo in B avrà la celerità $c = \sqrt{2g(m-x)}$ che acquista (171) scendendo per $LI = m - x$, e quindi $dt = \frac{ds}{c}$ (35) $= \frac{-dx}{\sqrt{(mx - x^2)}} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{r}{g}}$; onde integrando fatto $x = \frac{m}{2}(z+1)$ (L. 1013. 2°.), $t = arc.\ cos\left(\frac{2x}{m} - 1\right) . \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, senza Costante perchè quando $t = 0$, anche $arc. = 0$. Volendo dunque il tempo d'una semioscillazione AD, si farà $x = 0$, e verrà $t = 180°. \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$ (L. 693) $= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$ (L. 606), onde il tempo d'un'oscillazione sarà $t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, espressione che non contenendo m vale per tutti i piccoli archi circolari. Dunque 1°. *Le piccole oscillazioni nel circolo sono isocrone:* 2°. poichè i tempi per l'arco AOD e per il diametro verticale 2FD o per la corda AD (174) sono $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, $T = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$ (64), e $\frac{\pi}{2} < 2$, *l'Arco* AOD *è trascorso in minor tempo che la sua corda* AD.

176. Del resto il solo pendolo oscillante tra due lamine

cicloidali ha isocrone tutte le sue o grandi o piccole vibrazioni; poichè in tal caso egli descrive una cicloide (L. 1039) in cui ritenute le denominazioni di sopra (175) e presa $\frac{DF}{2}$
7. $=\frac{r}{2}$ per diametro del circolo genitore, si avranno (L. 1122) gli archi DOA $=\sqrt{2rm}$, DOB $=\sqrt{2rx}$, e l'arco AB $=$ $s=\sqrt{2rm}-\sqrt{2rx}$, onde BC $=ds=\frac{-rdx}{\sqrt{2rx}}$, quantità che si ha quì esattamente, mentre di sopra (175) si ottenne solo per approssimazione. Ripetuto pertanto il raziocinio medesimo, verrà $t=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ per il tempo comune a tutte le oscillazioni o grandi o piccole della cicloide.

Questa curva oltre essere *isocrona* o *Tautocrona* è anche *Brachistocrona*, cioè di quante linee posson condursi tra due punti di un piano verticale, ella è trascorsa nel brevissimo o minimo tempo possibile: infatti posto LI $(=m-x)=y$, sarà $dt=\frac{ds}{c}=\frac{ds}{\sqrt{2gy}}$ (175), e il tempo $t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\times\int\frac{ds}{\sqrt{y}}$ dovrà essere un *Minimo*; ora si sa (L. 1205. III.) che ciò si avvera nella cicloide.

Per altro la difficoltà di conservare uniforme la curvatura delle due lamine metalliche rammentate di sopra, le quali si contraggono al freddo o si dilatano al caldo, ha fatta abbandonar questa curva e ha dato luogo ad una terza specie di pendoli. I loro archi dopo l'introduzione di quel meccanismo ingegnoso che gli Orologiaj chiamano *scappamento libero*, vanno da 7° fino a 12° e anche a 20°, nè per questo è sensibilmente turbato l'isocronismo: 1°. perchè sospendendosi ora la verga FD col mezzo di due molle, il punto D descrive degli archi assai più prossimi ai cicloidali che ai circolari: 2°. perchè le forze acquistate al termine delle semiocillazioni AD, BD, CD, misurandosi dai seni versi LD, ID, KD (171) ed in caso d'isocronismo essendo le forze motrici come gli spazj trascorsi o le semioscillazioni medesime (94), quanto queste saranno più piccole tanto sarà più piccolo il seno verso o la forza acquistata, onde gli ostacoli che rendono irregolare il moto del pendolo, restando sensibilmente gli stessi e nelle grandi e nelle piccole oscillazioni, è chiaro che queste assai men forti di quelle ne risentiranno in pratica una più grande alterazione: di modo che se le piccole oscillazioni si riguardano per isocrone quantunque assai alterate dagli ostacoli dell'attrito e dell'aria, potranno riguardarsi per tali anche le grandi che con la lor forza maggiore distruggono quasi interamente l'effetto di quegli ostacoli.

177. III. Trovar la ragione dei tempi che impiegherebbe un mobile trascorrendo la lunghezza AD e l'altezza AB. E' evidente che in D si ha il tempo $\theta=\lambda\sqrt{\frac{2}{ag}}$ (150): ma in B si ha $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$ (64) e quì $s=a$; dunque $\theta:t::\lambda\sqrt{\frac{2}{ag}}:\sqrt{\frac{2a}{g}}::\lambda:a$. 8.

178. Onde se due piani ABD, GMD sieno egualmente inclinati, i tempi spesi per AD, GD saranno come le radici dell'altezze AB, GM o delle lunghezze AD, GD; poichè posta GD $=\lambda'$, GM $=a'$ e chiamato θ' il tempo per GD, t' quello per GM, sarà $\theta':t'::\lambda':a'$ (177): ma l'eguale inclinazione dei piani dà $\lambda:a::\lambda':a'::\theta:t$; dunque $t:t'::\theta:\theta'$: ma $t:t'::\sqrt{\frac{2a}{g}}:\sqrt{\frac{2a'}{g}}::\sqrt{a}:\sqrt{a'}::\sqrt{\lambda}:\sqrt{\lambda'}$; dunque anche $\theta:\theta'::\sqrt{a}:\sqrt{a'}::\sqrt{\lambda}:\sqrt{\lambda'}::\sqrt{AB}:\sqrt{GM}::\sqrt{AD}:\sqrt{GD}$.

179. Dunque 1°. anche *i tempi* t, t' *delle oscillazioni* NDO, M'ΔX *di due pendoli semplici sono come le radici* 7.
delle lunghezze FD $=\lambda$, FΔ $=\lambda'$ *dei pendoli*. Infatti (175) si ha $t=\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$ e $t'=\pi\sqrt{\frac{\lambda'}{g}}$, onde $t:t'::\sqrt{\lambda}:\sqrt{\lambda'}$. Si vede però che se i due pendoli fossero in diverse Latitudini e perciò obbedissero a gravità g, g' diverse, sareb-

be $t : t' :: \sqrt{\frac{\lambda}{g}} : \sqrt{\frac{\lambda'}{g'}}$; e se un pendolo stesso si portasse in diverse Latitudini, verrebbe $t : t' :: \sqrt{g'} : \sqrt{g}$.

180. Dunque 2°. *le lunghezze λ, λ' dei pendoli son reciprocamente come i quadrati dei numeri* n, n' *dell' oscillazioni fatte in un dato egual tempo* T. Poichè i tempi t, t' eguagliando il tempo T diviso per i numeri n, n' dell' oscillazioni (L. 36) cioè avendosi $t = \frac{T}{n}$, e $t' = \frac{T}{n'}$, sarà $t : t' :: \frac{T}{n} : \frac{T}{n'} :: n' : n :: \sqrt{\lambda} : \sqrt{\lambda'}$ (179), e quindi $\lambda : \lambda' :: n'^2 : n^2$.

181. Dunque 3°. data la lunghezza d' un pendolo e il tempo d' una sua oscillazione, si conoscerà facilmente il tempo d' un' oscillazione d' un altro pendolo la cui lunghezza sia data, o si avrà la sua lunghezza se sia dato il tempo d' una sua oscillazione. Tra noi un pendolo semplice di *piedi* 3 *poll.* 0 *lin.* 8, 38 batte i secondi: onde se nell' equazione $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ (175) sia $t = 1''$, $\pi = 3,14159265$, $\pi^2 = 9,869604$, $r = 440,38$ *linee*, verrà $g = 30,183$ *piedi* (68), e lo spazio $\frac{g}{2}$ liberamente descritto in $1''$ da un corpo cadente (6), sarà di 15, 0915 *piedi*, come si sapeva per esperienza (41).

182. Il *pendulo composto*, quello cioè da cui pendono due o più pesi immobili μ, μ' come in M, M', segue con
7. qualche modificazione le stesse leggi. In fatti se FM, FM' fossero due pendoli semplici, è chiaro che l' oscillazioni di μ in M sarebbero più lente dell' oscillazioni di μ' in M' (180): ma attenendosi μ, μ' ad una stessa verga inflessibile FM, nè potendo ella nel tempo medesimo oscillare e più tardamente per obbedire a μ, e più prontamense per obbedire a μ', è del pari evidente che il tempo delle sue oscillazioni sarà la risultante dei tempi dell' oscillazioni di μ, μ' separati; e poichè questi tempi sono espres-

si da $\sqrt{FM}$, $\sqrt{FM'}$ (180), il tempo risultante dovrà esprimersi con una $\sqrt{F\Pi}$ media tra $\sqrt{FM}$, $\sqrt{FM'}$, e il 7.
pendolo semplice FΠ sarà isocrono al dato pendolo composto; cosicchè per conoscere il tempo dell' oscillazioni di questo, basterà determinar la lunghezza FΠ di quello, cioè il *centro* Π *d' oscillazione* del pendolo composto. Si osservi dunque che come il tempo $\sqrt{F\Pi}$ è la risultante dei tempi $\sqrt{FM}$, $\sqrt{FM'}$, così l' oscillazione ΠL dee esser la risultante dell' oscillazioni separate MD, M'Δ, e quindi anche la forza in Π per cui si fa l' oscillazione ΠL è necessariamente la risultante delle forze in M, M' per cui si farebbero l' oscillazioni MD, M'Δ.

Ciò supposto, sia $F\Pi = x$, $FM = a$, $FM' = \pm b$ (il segno di sotto serve per il corpo μ' fissato al di là del punto di sospensione F), e si avrà $\Pi M = a - x$, $\Pi M' = \Pi F \mp FM' = x \mp b$; e poichè le forze in M, M' fanno in un tempo medesimo descrivere ai pesi μ, μ' gli archi MD, M'Δ o le loro proporzionali $FM = a$, $FM' = \pm b$ (L. 594), sarà μa la forza in M, e $\pm \mu' b$ la forza in M' (24): ma la risultante di queste due forze passa per Π come si è visto; dunque condotta per Π la ΣΣ' normale alle forze pa- 7.
rallele MΣ, M'Σ' e preso Π per punso fisso (104), si avrà $\mu a \times \Pi\Sigma = \pm \mu' b \times \Pi\Sigma'$, onde $\mu a : \pm \mu' b :: \Pi\Sigma' : \Pi\Sigma :: \Pi M' : \Pi M :: x \mp b : a - x$; dunque $\mu a^2 - \mu a x = \pm \mu' b x - \mu' b^2$, e perciò $x = \frac{\mu a^2 + \mu' b^2}{\mu a \pm \mu' b}$, cioè *la distanza del centro* Π *d' oscillazione dal punto* F *di sospensione in un pendolo composto qualunque* (poichè il raziocinio stesso si adatta ad un pendolo di tre pesi, di quattro ec purchè riuniti tutti nella linea stessa FM che passa per F *si ha dividendo per l' aggregato di tutte le forze coi loro segni ciascuna forza col suo segno moltiplicata per la sua positiva o negativa distanza da* F.

La somma $\mu a^2 + \mu' b^2$ dei prodotti di ciascun corpo o molecula μ, μ' d' un sistema, per il quadrato a^2, b^2 della loro distanza dal punto F o da un asse dato, chiamasi dai

FIG. Fisici *Momento d' Inerzia*. Da questo Momento derivano essi la *Teoria dei corpi rotanti* che non può quì aver luogo, e solo osserveremo che l' aria, come mezzo assai raro, poco alterando la gravità propria o specifica e poco anche la gravità acceleratrice d' un pendolo che oscilla, la risultante delle forze gravitanti dei corpi μ, μ' cioè il centro d' oscillazione, non differirà sensibilmente dalla risultante delle forze rotanti dei corpi stessi cioè dal *centro di percussione* o da quel punto Π con cui, se la verga FD
7. aggirandosi intorno ad F percuotesse un corpo, gli imprimerebbe il massimo possibile movimento. Del resto questi due centri non sono una cosa stessa, come molti han creduto; e mentre nell' acqua il centro d' oscillazione non è più in Π ove era nell' aria, il centro di percussione col cangiar di mezzo non cangia di luogo, e supposta costante la velocità dei corpi rotanti, resta anch' egli costantemente nel punto Π.

183. Se T sia il comun centro di gravità dei pesi μ, μ', posta FT $= z$, si avrà (111) $\mu : \mu' :: z \mp b : a - z$, onde $z = \frac{\mu a \pm \mu' b}{\mu + \mu'}$. Di quì si imparano quattro cose: 1°. che essendo $\frac{\mu a^2 + \mu' b^2}{\mu a \pm \mu' b} = \frac{\mu a^2 + \mu' b^2}{(\mu + \mu')\frac{(\mu a \pm \mu' b)}{\mu + \mu'}}$ la distanza del centro d' oscillazione o di percussione del punto F o da un asse dato, eguaglia il Momento d' Inerzia diviso per il prodotto delle masse nella distanza del loro centro di gravità dallo stesso asse o punto F: 2°. che il centro d' oscillazione o di percussione è diverso dal centro di gravità e che questo è più vicino di quello al punto F di sospensione, perchè essendo $a^2 + b^2 > 2ab$, si avrà sempre $\frac{\mu a^2 + \mu' b^2}{\mu a \pm \mu' b} > \frac{\mu a \pm \mu' b}{\mu + \mu'}$: 3°. che quanto più il centro di gravità T si accosta al punto di sospensione F, tanto più se ne discosta il centro Π d' oscillazione, perchè nel caso di $z = \frac{\mu a - \mu' b}{\mu + \mu'}$, se $\mu a =$

$\mu' b$

$\mu' b$ sarà $z =$ FT $= 0$ (L. 271) e il centro di gravità coinciderà col punto F di sospensione, mentre intanto l' equazione $x = \mathrm{F}\Pi = \frac{\mu a^2 + \mu' b^2}{0} = \infty$ (L. 270) ci fa vedere che la distanza del centro Π d' oscillazione o di percussione diviene infinita: 4°. che se le forze μa, $\pm \mu' b$ si considerino come due pesi P, P', si avrà $z = \frac{\mathrm{P}a \pm \mathrm{P}'b}{\mathrm{P} + \mathrm{P}'} = \frac{\mu a^2 + \mu' b^2}{\mu a \pm \mu' b}$, cioè poste le forze in luogo dei pesi, il centro di gravità conincide col centro d' oscillazione o di percussione, che può conseguentemente determinarsi come il centro di gravità (112. ec.). Così per esempio, se FO sia una verga pesante ed omogenea, di cui si voglia il centro d' oscillazione o di percussione, non dovrà farsi solamente $s =$ FO $= x$ come sopra (113), ma bisognerà eguagliare s alla forza, moltiplicando il solito peso o volume x per la distanza OF $= x$ (182) e ponendo $s = \mathrm{FO} \times \mathrm{OF} = x^2$; quindi si avrà $ds = 2xdx$ e la formula (112) darà $\frac{\int 2x^2 dx}{x^2} = \frac{2x^3}{3x^2} = \frac{2x}{3} = \frac{2}{3}$ FO, onde il centro d' oscillazione o di percussione sarà nei due terzi della data verga pesante FO ec. Ma torniamo ormai alle trajettorie.

184. Se la forza acceleratrice φ che unita alla momentanea (130) guida il corpo M per la trajettoria SMN, si risolva in 12.
due forze (99), l' una acceleratrice orizzontale $\varphi' = \mathrm{X}$ che lo spingerebbe per MI parallela all' ascisse SV $= x$, l' altra acceleratrice verticale $\varphi'' = \mathrm{Y}$ che lo spingerebbe per MH parallela all' ordinate VM $= y$, onde nel tempo dt trascorresse M$a = dx$ in virtù della prima, ed M$a' = dy$ in virtù della seconda; ben si sa che egli nel tempo stesso dt trascorrerà realmente la diagonale M$b = ds$ (95), e

che mentre le due forze gli imprimono le celerità $c' = \frac{ds}{dt}$ e $c'' = \frac{dy}{dt}$, la sua celerità effettiva sarà $c = \frac{ds}{dt}$ (35). Ora $\varphi' dt = dc'$ e $\varphi'' dt = dc''$ (36); dunque $X dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ed $Y dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, equazioni generali che serviranno a scoprire le più importanti proprietà delle trajettorie.

12. 185. I. Sia C il centro della forza, $CS = a$ la distanza ove il mobile ricevè in principio una nota celerità p di projezione, $CE = k$ la nota normale alla tangente SD (L. 759), $CM = z$ un raggio vettore, $MR = F$ la forza centripeta in M che risoluta nelle due MI, MO (99), dà MC $(z) : CV (a - x) :: MR (F) : RO = MI = \frac{F(a - x)}{z} = X$, e CM (z) : MR (F) :: VM (y) : MO $= \frac{Fy}{z} = -Y$ (perchè la forza verticale che si prese all' insù (184), è quì all' ingiù); dunque l'equazioni generali divengono $\frac{F dt (a - x)}{z} = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ e $\frac{-F y dt}{z} = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, che moltiplicate la prima per y, la seconda per $a - x$, e poi sommate, danno $0 = y \times d\left(\frac{dx}{dt}\right) + (a - x) \times d\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Integrando quest' equazione, s' ottiene $\frac{y dx}{dt} + (a - x)\frac{dy}{dt} = Cost. = B$ che or ora determineremo, ed aggiungendo $\frac{y dx}{dt}$ ai due membri e nuovamente integrando, $\int y dx + \frac{(a - x)}{2} y = \frac{Bt}{2}$ senza costante perchè nel principio del moto ove $x = 0$, si ha $y = 0$ e $t = 0$: ma $\int y dx = SMV$ (L. 1115.) ed $\frac{(a - x)}{2} y = MVC$ (L. 601); dunque il settore CSM $= \frac{Bt}{2}$ e per la stessa ra-

gione un altro settor qualunque CST $= \frac{B\tau}{2}$; dunque CST $-$ CSM $(= CMT)$: CSM :: $\frac{B\tau - Bt}{2} \left[= \frac{B}{2}(\tau - t) = \frac{Bt'}{2} \right] : \frac{Bt}{2}$, onde CSM : CMT :: $t : t'$, cioè *in ogni trajettoria l' aree comprese dai raggi vettori e dall' arco della curva son proporzionali ai tempi impiegati a trascorrerlo*. 12.

186. II. Sia l' angolo SCM $= \beta$, e si avrà il settore SCM $= \frac{1}{2}\int z^2 d\beta$ (L. 1117) $= \frac{1}{2} Bt$ (185); dunque differenziando $z^2 d\beta = B dt$ ovvero $\frac{d\beta}{dt} = \frac{B}{z^2}$; e in un altro punto di curva si avrebbe $\frac{d\beta'}{dt'} = \frac{B}{z'^2}$, onde $\frac{d\beta}{dt} : \frac{d\beta'}{dt'} :: \frac{1}{z^2} : \frac{1}{z'^2}$: ma $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\beta'}{dt'}$ sono archi o spazj divisi per i tempi in cui si trascorrono, cioè celerità con cui il raggio vettore descrive gli archi o angoli $d\beta$, $d\beta'$, *celerità* che perciò i Meccanici chiamano *angolari*; dunque *in ogni trajettoria le celerità angolari sono in ragione inversa del quadrato dei raggi vettori*.

187. III. Supposta ora MN tangente in M, si conduca ad essa la normale $CN = q$, e poichè $Mb = ds$ (184), si avrà $MCb = \frac{z^2 d\beta}{2} = \frac{B dt}{2}$ (186) $= \frac{q ds}{2}$ (L. 601); dunque la celerità effettiva $\frac{ds}{dt}$ (184) $= c = \frac{B}{q}$: ma in S, cioè nel principio del moto si ha $c = p$, $q = k$ (185); dunque $B = kp$ e $\frac{ds}{dt} = c = \frac{kp}{q}$; dunque *in ogni trajettoria le celerità effettive sono inversamente come le normali condotte dal centro sulle tangenti*.

188. Ripiglio ora l'equazioni (185) $\frac{F dt (a - x)}{z} = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $-\frac{F y dt}{z} = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, e moltiplicando l' una per $\frac{dx}{dt}$, l'

altra per $\frac{dy}{dt}$ e poi sommandole, ottengo, fatta dt costante, $\frac{-F[ydy-(a-x)dx]}{z} = \frac{dxddx+dyddy}{dt^2}$: Ma $ydy-(a-x)dx = \frac{d[y^2+(a-x)^2]}{2} = \frac{d(z^2)}{2}$ (L. 559) $= zdz$, e $\frac{dxddx+dyddy}{dt^2} = \frac{d(dx^2+dy^2)}{2dt^2} = \frac{d(ds^2)}{2dt^2} = \frac{d(c^2)}{2} = cdc$; dunque I°. $-F = \frac{cdc}{dz}$: inoltre poichè $c = \frac{kp}{q}$ (187), $dc = \frac{-kpdq}{q^2}$, sarà II°. $F = \frac{k^2p^2dq}{q^3dz}$: quindi essendo $c^2 = \frac{k^2p^2}{q^2}$, $\frac{dq}{q} = d(Lq)$ (L. 1014), verrà III°. $F = \frac{c^2.d(Lq)}{dz}$: infine da $q = \frac{kpdt}{ds}$ (187) si ha $dq = \frac{-kpdtdds}{ds^2}$, e presa al solito dx costante, da $ds^2 = dx^2+dy^2$ si ha $dds = \frac{dyddy}{ds}$; dunque introducendo il raggio osculatore r (L. 1033), avremo $dq = \frac{-kpdtdyddy}{ds^3} = \frac{kpdtdy}{rdx}$: ma dt, dx costanti danno (185) $a = x$ onde $B = \frac{ydx}{dt} = kp$ (187), $z = \sqrt{[y^2+(a-x)^2]} = y$ ed $\frac{ydx}{dt} = \frac{zdx}{dt} = kp$; dunque $dq = \frac{zdz}{r}$ e perciò IV. $F = \frac{k^2p^2dq}{q^3dz} = \frac{k^2p^2z}{q^3r}$.

189. IV. Riunendo pertanto i quattro valori di F, si trova che in ogni trajettoria la forza centrale è $F = \frac{-cdc}{z} = \frac{k^2p^2dq}{q^3dz} = \frac{c^2.d(Lq)}{dz} = \frac{k^2p^2z}{q^3r}$. In un altro punto di curva si avrebbe dunque $F' = -\frac{c'dc'}{z'} = \frac{k^2p^2dq'}{q'^3dz'} = \ldots \frac{c'^2.d(Lq')}{dz'} = \frac{k^2p^2z'}{q'^3r'}$; e perciò preso l'ultimo valore, $F : F' :: \frac{z}{q^3r} : \frac{z'}{q'^3r'}$, cioè *in ogni trajettoria le forze centrali*

son come i raggi vettori divisi per il prodotto dei raggi osculatori nel cubo delle normali condotte dal centro sulle tangenti. Tali sono le più utili proprietà generali delle trajettorie: se si fissi la legge con cui opera la forza centrale, potranno aversene delle particolari.

190. V. Operi, per esempio, questa forza in ragione inversa del quadrato delle distanze (4). Supposto che in una data distanza b dal centro C la forza F divenga la soli- 12.
ta forza g di gravità (44) e però si abbia $F : g :: b^2 : z^2$ onde $F = \frac{b^2g}{z^2}$, sarà $Fdz = \frac{b^2gdz}{z^2} = -cdc$ (189), ed integrando, $\frac{-b^2g}{z} + Cost. = -\frac{c^2}{2}$. Per determinar la costante basta rammentarsi che quando il raggio vettore CM diventa CS, la celerità c si cangia in quella di projezione p (185), cioè quando $z = a$ si ha $c = p$; dunque $-\frac{b^2g}{a} + Cost. = \frac{-p^2}{2}$ e però $Cost. = \frac{b^2g}{a} - \frac{p^2}{2}$, e l'integrale completa sarà $\frac{-b^2g}{z} + \frac{b^2g}{a} - \frac{p^2}{2} = \frac{-c^2}{2}$; dal che si deduce che *operando la forza centrale in ragione inversa del quadrato delle distanze, la celerità di rivoluzione in qualunque punto della trajettoria è* $c = \sqrt{[p^2 - 2b^2g\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right)]}$.

191. VI. Sieno f, h l'altezze dovute alle celerità c, p di rivoluzione e projezione, onde $f = \frac{c^2}{2g}$ ed $h = \frac{p^2}{2g}$ (70); dunque l'equazione di sopra diverrà $\sqrt{2fg} = \sqrt{[2gh - 2b^2g\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right)]}$, e però se si conoscano f, h, potrà conoscersi anche il raggio vettore z, cioè *operando la forza centrale nella ragione già detta, il raggio vettore è* $z = \frac{ab^2}{b^2 - a(h-f)}$.

192. VII. Se ora si vogliano i punti della curva in cui la celerità c è massima o minima, ripresa l'equazione

$b^2gz^{-3}dz = -cdc$ (190), avremo (L. 1043) $dc = \frac{-b^2gz^{-2}dz}{c}$ $= 0 = \pm\frac{dz}{z^2}$, e nuovamente differenziando presa dz costante, verrà $\mp\frac{2dz^2}{z^3}$, il che dimostra (L. 1044) che $\frac{dz}{z^2}$ corrisponde al massimo e $\frac{-dz}{z^2}$ al minimo: ma $\frac{\pm dz}{z^2} = d\left(\frac{1}{\mp z}\right)$ $= d\left(\frac{b^2 - a(h-f)}{\mp ab^2}\right)$ (191) $= \frac{df}{\mp b^2}$; dunque $\frac{df}{\mp b^2} = 0 =$ df; ed integrando, $f = Cost.$: ma f non può esser costante se non quando c cangiandosi in p, anche f diventa h: dunque $Cost. = h = f$, $f - h = 0$, onde $z = a$ (191). Ora è chiaro che la porzione indeterminata a dell' asse può prendersi tanto di quà che di là da C; dunque *operando la for-*
12. *za centrale al solito, la celerità è massima o minima quando il raggio vettore o di quà o di là da C si confonde con l' asse* CS.

Gli Astronomi fanno un grand' uso di queste proprietà, e dopo averne dedotte le trajettorie planetarie, fissano anche con l' osservazione e col calcolo le quantità a, b, f, h, che quì lasciamo nella loro indeterminata generalità, per investigare due altre trajettorie, le quali appartengono più da vicino al nostro soggetto. Potrebbero dedursi anche queste dalle formule generali di sopra (184): ma ci piace trattarle con un metodo ancor più semplice.

193. Vogliasi la trajettoria d' un mobile lanciato obliquamente con una data celerità C. La forza centrale f che si combina con la momentanea F (130) è dunque ora la forza stessa di gravità g. (44). Sia pertanto la data celerità C
13. quella a cui è dovuta l' altezza a = AB. onde $C = \sqrt{2ag}$ (70); e poichè i raggi vettori BC, DE posson prendersi per paralleli (42), sia BD = S lo spazio che la forza momentanea farebbe percorrere al corpo B nel tempo T se la forza centrale non lo facesse scendere in un egual tempo t per la verticale DM $= s$. Avremo dunque $T = t$: ma il moto per

DB è uniforme (6) onde $T = \frac{S}{C} = \frac{S}{\sqrt{2ag}}$ (29), e il moto 13.
per DM è uniformemente accelerato (8) onde $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ (63): dunque $\frac{S}{\sqrt{2ag}} = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ ed $S^2 = 4as$, equazione alla trajettoria cercata che è una parabola (L. 882), il cui diametro è BC, il parametro è $4a$, e l' angolo delle coordinate BD, DM è l' angolo BDE, complemento dell' angolo DBE di projezione. Or se si faccia BE $= x$, EM $= y$, $tang$ DBE $= t$, si avrà (L. 749) ED $= tx$, DM $= tx - y = s$, BD $= \sqrt{(t^2x^2 + x^2)} = S$ (preso R = 1), e l' equazione $S^2 = 4as$ diverrà $x^2(t^2+1) - 4a(tx - y) = 0$, ove si contiene tutta la teorìa della *Balistica* o arte del bombardare, esprimendo t la tangente dell' angolo che l' asse del Cannone dee far con l' orizzonte, ed a la forza della polvere cioè l' altezza BA a cui salirebbe la palla B lanciata verticalmente. Eccone qualche applicazione.

194. I. Data la forza della polvere, trovar l' angolo a cui dee porsi il Cannone onde colpisca il dato scopo S, S′, S″. Poichè è dato lo scopo S, cioè si è misurata con le regole trigonometriche o in altro modo la distanza BS e si è preso l' angolo SBG, potrà aversi anche BS′ ed SS′ (L. 757. 758). Sia perciò BS′ $= x = b$, S′S $= y = c$, e sostituendo nell' equazione di sopra (193) si avrà l' angolo cercato per mezzo della sua tangente $t = \frac{2a \pm \sqrt{[4a(a-c) - b^2]}}{b}$ Se lo scopo S′ sia nell' orizzontale stessa BG, sarà S′S $=$ $y = c = 0$, onde $t = \frac{2a \pm \sqrt{(4a^2 - b^2)}}{b}$; e se S″ sia sotto l' orizzontale BG, dovrà farsi S′S″ $= -y = -c$, onde $t =$ $\frac{2a \pm \sqrt{[4a(a+c) - b^2]}}{b}$. Dal che si vede in generale 1°. che per la possibilità del colpo è necessario che non sia mai nel primo caso $4a^2 < 4ac + b^2$, nel secondo $4a^2 < b^2$, nel terzo $4a^2 + 4ac < b^2$: 2°. che due essendo i valori

FIG.

di t, due son sempre gli angoli che soddisfanno al problema, dei quali il più grande si adopera allorchè lo scopo da colpirsi è un piano orizzontale come un tetto ec., e il più piccolo quando lo scopo è un piano verticale come un muro ec.

195. II. Data la forza della polvere, trovare il massi-
13 mo tiro o la massima distanza orizzontale BG a cui può giungere la bomba B. Si ha dunque ora BG $= x$ e però $y = 0$ ed $x = \frac{4at}{1+t^2}$, quantità che dee essere un *massimo*. Differenziando pertanto, considerata t come incognita perchè tutto si riduce a determinar l'angolo che dia il massimo tiro, si avrà (L. 1010. 1043) $\frac{dx}{dt} = \frac{4a - 4at^2}{(t^2+1)^2} = 0 = 1 - t^2$, onde $t = 1$ massimo cercato (L. 1044). Ora la tangente eguale al raggio corrisponde ad un angolo di 45°. (L. 694); dunque il massimo tiro si avrà quando il Cannone farà con l'orizzonte un angolo semiretto.

196. III. Dato l'angolo del Cannone e l'ampiezza del tiro, trovar la forza della polvere. Son dunque dati $x = b$, $y = c$ e t; onde la cercata $a = \frac{b^2(1+t^2)}{4(bt-c)}$.

197. IV. Dato lo scopo S, trovar la minima forza della polvere che potrà farvi giunger la palla B. Si avrà dunque, come prima, $x = b$, $y = c$, ma non già t, e converrà determinarla per aver a. Ora $a = \frac{b^2(1+t^2)}{4(bt-c)}$, quantità che deve essere un *minimo*; e però differenziando, si troverà $\frac{da}{dt} = \frac{4b^2(bt^2-2ct-b)}{(4bt-4c)^2} = 0 = bt^2 - 2ct - b$, dal che si ha $t = \frac{c \pm \sqrt{(b^2+c^2)}}{b}$, e nuovamente differenziando $\frac{da}{dt} = bt^2 - 2ct - b$, per distinguere il minimo dal massimo (L. 1044), viene $\frac{dda}{dt^2} = 2(bt-c) = \pm 2\sqrt{(b^2+c^2)}$; onde

de il minimo cercato si avrà prendendo il valor positivo di t, che sostituito nel valor di a, dà la minima carica $a = \frac{c + \sqrt{(b^2+c^2)}}{2}$.

Tutto ciò vale quando la resistenza del mezzo sia nulla: se il mezzo resista ed il projettile abbia una considerabil celerità, la trajettoria sarà una curva molto più complicata e l'ampiezze dei tiri non corrisponderanno a questi calcoli: i Pratici insegnano qualche metodo approssimato per correggerne i resultati.

198. Vogliasi ora la trajettoria d'un mobile animato da due forze BC, BD tra loro normali in modo che la forza centrale acceleratrice g' o la celerità che ella farebbe nascere in 1'', stia alla solita forza acceleratrice g di gravità come il doppio $2a$ della consueta verticale AB, al raggio vettore CB $= r$. Non supponendosi quì un raggio vettore infinito, prendo BD infinitesima, e condotta DM nella direzione del centro C, faccio ML parallela a BD; e giacchè BD ($=$ S) è infinitasima, lo sarà anche DM ($= s$), perchè sono esse gli spazj che le due forze finite momentanea e centrale farebbero scorrere al corpo in egual tempo infinitesimo: sarà anche BL $=$ DM $= s$, perchè tra le distanze BC infinita e BD finita vi è la medesima ragione che tra le distanze BC finita e BD infinitesima (L. 266), e si sa che nel primo caso BC, DM posson prendersi per parallele (42): infine presa CE $=$ CB $= r$, sarà EL $= 2r - s = 2r$, perchè s è infinitesima (L. 268). I.

Posto ciò, poichè per ipotesi $g' : g :: 2a : r$, sarà $g' = \frac{2ag}{r}$; onde ripetuto il raziocinio di sopra (193) si avrà $T = \frac{S}{C} = \frac{S}{\sqrt{2ag}}$, $t = \sqrt{\frac{2s}{g'}} = \sqrt{\frac{rs}{ag}}$, $T = t$, e però $S = \sqrt{2r \times s} = \sqrt{(2r-s)s}$, ed $S^2 = 2rs - s^2$, equazione alla trajettoria cercata che atteso l'angolo retto delle coordinate, è un circolo del raggio CB $= r$ (L. 564). Esaminiamo questa curva.

FIG. 1. 199. I. Si sa che in ogni trajettoria le celerità effettive del mobile sono in ragione inversa delle normali condotte dal centro sulle tangenti (187) e che queste normali nel circolo sono gli stessi suoi raggi (L. 496); dunque le celerità del mobile *in tutti i punti della curva circolare* saranno eguali, ed egli in tempi eguali trascorrerà degli spazj eguali, cioè *il moto sarà uniforme* (6).

12. 200. II. Poichè la forza centripeta avvicina il corpo e la centrifuga lo allontana in un dato tempo dal centro, se nella curva SM si descriva col raggio CS l'arco SB, sarà DA la quantità di cui si avvicina il corpo al centro C, e sarà BD (differenza tra DC ed SC) la quantità di cui se
12. ne allontanerebbe; onde nella curva SM le due forze, pro-
e porzionali ai loro effetti DA, BD, son diseguali. Non così nel
1. circolo, ove l'effetto DA o DM della centripeta è manifestamente eguale all'effetto BD o MD della centrifuga. Ora DM $=$
1. BL $= \frac{BM^2}{EB}$ (L. 559) perchè l'arco infinitesimo BM si confonde con la sua corda; dunque *lo spazio* BL *che la forza centrale farebbe trascorrere al corpo in un istante, eguaglia il quadrato dell' arco* BM *che realmente trascorre, diviso per il diametro del circolo*.

201. III. Essendo $2ag = C^2$, sarà (198) $g' = \frac{C^2}{r}$, valore della forza centrale acceleratrice nel punto del circolo ove si trova il corpo μ: ma se si voglia la misura assoluta della forza motrice $F = g'\mu$ (40) $= \frac{C^2\mu}{r}$, sarà $C^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$ (35), $ds^2 = BM^2 = EB.BL = 2r.BL$, ed $F = \frac{\mu.2BL}{dt^2}$.

202. IV. Sieno F, F' le forze centrali in due diverse circonferenze EMB, GNH, e avremo (201) $F:F'::\frac{C^2\mu}{r}:\frac{C'^2\mu'}{r'}$, cioè *nelle trajettorie circolari le forze centrali sono in ragion diretta composta delle masse e dei quadrati delle lor celerità, ed inversa dei raggi*. Che se le circonfe-

 FIG.

renze EMB, GNH sieno $2r\pi$, $2r'\pi$ (L. 606.) e sieno τ, τ' i 1.
tempi periodici impiegati a trascorrerle, il moto uniforme (199) ci darà $C\left(=\frac{S}{T}\right)=\frac{2r\pi}{\tau}$, $C'\left(=\frac{S'}{T'}\right)=\frac{2r'\pi}{\tau'}$, e però $F:F'::\frac{r\mu}{\tau^2}:\frac{r'\mu'}{\tau'^2}$, cioè *le forze centrali sono in ragion diretta composta delle masse e dei raggi, ed inversa dei quadrati dei tempi periodici*. Anzi, poichè $C:C'::\frac{r}{\tau}:\frac{r'}{\tau'}$, si avrà anche $F:F'::\frac{C\mu}{\tau}:\frac{C'\mu'}{\tau'}$, cioè *le forze centrali sono in ragion diretta composta dalle masse, e delle loro celerità, ed inversa de' tempi periodici*.

Da queste tre analogie può dedursi nei varj casi di $C = C'$ di $\mu = \mu'$, di $r = r'$ ec. una quantità di importantissime conseguenze. Bastino le seguenti.

203. V. Se le forze centrali F, F' sieno reciprocamente come i quadrati delle distanze dal centro C, si avrà $F:$
$F'::r'^2:r^2::\frac{r\mu}{\tau^2}:\frac{r'\mu'}{\tau'^2}$ (202), onde fatto $\mu = \mu'$, sarà 1.
$\frac{r'^3}{\tau'^2} = \frac{r^3}{\tau^2}$, e quindi $r^3:r'^3::\tau^2:\tau'^2$, cioè i quadrati dei tempi periodici di due mobili eguali che girano in due diverse circonferenze sono come i cubi dei raggi.

204. VI. Se la Terra gira intorno all' asse Pp, le forze centrifughe di tre sue particelle in H, N, P daranno l'analogie $F:F':F''::\mu.HC:\mu'.NX:\mu''.o$ (202), e supponendo eguali le masse, verrà $F:F':F''::HC:NX:o$, cioè nell' equatore H la forza centrifuga è massima, perchè è massimo il raggio CH; nel polo P è nulla perchè il raggio è zero, e nel luogo intermedio N, è minor che nell' equatore, perchè $NX < CH$; onde la gravità che opera contrariamente alla forza centrifuga, agirà nei poli come se la Terra non girasse, nell' equatore sarà diminuita di tutta la forza centrifuga a cui si oppone direttamente, e nelle zone medie soffrirà una diminuzione tanto più grande quanto N sarà più vicino ad H. Dunque se la Terra fu nel suo principio una sfera fluida, perdè certamente la sua figura ap-

pena cominciò a muoversi in giro, e divenne una sferoide elevata all' equatore e compressa ai poli, compensando in tal guisa con una maggior quantità di fluido la diminuzione della gravità. Ora tutto ciò si accorda mirabilmente con le ripetute osservazioni dei Fisici.

Comunicazione del moto.

205. Allorchè due corpi si urtano, passa il moto dall' uno nell' altro (16) con delle leggi che dipendono egualmente e dalla tessitura delle loro parti e dalla particolar linea dei movimenti, poichè quì prescindiamo dall' esterna configurazione, e dai piani su cui si fa il movimento. Quanto alla struttura dei corpi, essi si riducono alle due classi di *perfettamente molli* che mancanti d' ogni intrinseca forza di restituzione, rimangono dopo l' urto nello stato di compressione a cui l' urto medesimo gli ridusse, e di *perfettamente elastici* che dotati d' una piena forza di restituzione, tornano dopo l' urto allo stato di prima: non parliamo dei *perfettamente duri*, perchè qualunque sia la lor natura, mancano come i molli d' ogni intrinseca forza, e perciò con le leggi stesse dei molli si comunicano il movimento. Nè sembri strana questa divisione a chi sa non esservi alcun corpo in natura perfettamente elastico o molle; poichè fatta da principio l' ipotesi della sua esistenza, insegneremo poi a rettificare i risultati in qualunque caso d' imperfetta elasticità. Quanto alla linea dei movimenti, ella può essere o *diretta* o *obliqua* (12), onde anche la comunicazion del moto dee considerarsi in questi due casi. Cominciamo dall' urto diretto.

206. Sieno due corpi in movimento, e sia M la massa, C la celerità dell' uno, ed m la massa, $\pm c$ la celerità dell' altro, la quale sarà positiva se m si muova dalla parte stessa di M, cioè se i due corpi si inseguano, e sarà negativa se m si muova oppostamente ad M, cioè se i due corpi s' incontrino. E' chiaro (19) che i loro moti saranno MC, $\pm$

mc, e posto x il moto che riceve m per l' azione di M, sarà x il moto che perde M per la reazione di m (16); dunque dopo l' urto il moto o forza di M sarà $F = MC - x$, e quella di m sarà $f = x \pm mc$. Chiamando pertanto C', c' le celerità di M, m dopo l' urto, poichè $C' = \frac{F}{M}$, $c' = \frac{f}{m}$ (21), le celerità di M, m dopo l' urto saranno $C' = \frac{MC - x}{M}$, $c' = \frac{x \pm mc}{m}$.

207. Ora i corpi perfettamente molli o duri hanno in se la sola forza d' inerzia che si è già calcolata, e niun' altra forza può immaginarsi in essi che gli obblighi dopo l' urto a separarsi (205); dunque M strascinerà seco m dopo averlo raggiunto, e movendosi ambedue come un sol corpo, la differenza delle loro celerità sarà nulla. Avremo perciò $\frac{MC - x}{M} - \frac{x \mp mc}{m} = 0$, onde $x = \frac{1(MmC \mp Mmc)}{M + m}$.

208. Non così i corpi perfettamente elastici, che avendo oltre la forza d' inerzia una forza di restituzione eguale a quella di compressione, tornano dopo l' urto allo stato di prima (205), e perciò conservano la differenza medesima $C \mp c$ di celerità che ebbero prima d' urtarsi; onde le celerità prima dell' urto sono in proporzione aritmetica con le celerità dopo l' urto (L. 210). Osservo pertanto che supposta $C > c$, se i corpi fossero molli, la celerità di m dopo l' urto eguaglierebbe quella di M (207); dunque se sieno elastici, la celerità $\frac{x \pm mc}{m}$ di m, o i corpi si inseguano o si incontrino, supererà la celerità $\frac{MC - x}{M}$ di M, perchè la forza di restituzione operando in M verso m ed in m verso M, si aggiunge ad m un nuovo colpo che lo accelera, ed M ne riceve un altro che lo ritarda. Sarà dunque $\frac{x \pm mc}{m} > \frac{MC - x}{M}$ e la proporzione aritmetica

$C : \pm c \therefore c' : C' \therefore \frac{x \mp mc}{m} : \frac{MC - x}{M}$ darà (L. 219) $x = \frac{2(MmC \mp Mmc)}{M+m}$.

209. Dunque la forza perduta da un corpo elastico è doppia della forza perduta da un corpo molle, e i limiti tra la mollezza ed elasticità perfetta sono 1, 2: perciò se si ponga n in luogo dei coefficienti 1, 2 e sia o $n = 1$, o $n > 1$, o $n < 2$, o $n = 2$, il moto che due corpi in qualunque grado elastici hanno perduto nell' urto, potrà generalmente esprimersi con la formula $x = \frac{n(MmC \mp Mmc)}{M+m}$.

Se dunque si vogliono le celerità C', c' dopo l' urto dei due corpi M, m, basterà sostituir nelle formule di C', c' trovate di sopra (206) i valori di x (207. 208. 209) e si avrà

210. Per gli elastici in generale $C' = C - \frac{nm(C \mp c)}{M+m}$, $c' = \frac{nM(C \mp c)}{M+m} \pm c$.

211. Per i perfettamente elastici $C' = C - \frac{2m(C \mp c)}{M+m}$, $c' = \frac{2M(C \mp c)}{M+m} \pm c$.

212. Per i perfettamente molli $C' = c' = \frac{MC \pm mc}{M+m}$.

213. Con queste formule potranno sciogliersi tutti i problemi relativi all' urto di due corpi nei varj casi di $C = c$, di $M = m$ ec. Eccone alcuni d' altro genere.

214. I. Essendo $MC^2 + mc^2$ la somma dei prodotti delle masse elastiche nei quadrati delle celerità prima dell' urto, trovar la somma di questi stessi prodotti dopo l' urto. Saranno essi $MC'^2 + mc'^2$, e sostituendo i valori di $C' = \frac{C(M-m) \pm 2mc}{M+m}$, e di $c' = \frac{2MC \mp c(M-m)}{M+m}$, riducendo, e dividendo per $(M+m)^2$, si ha $MC^2 + mc^2$; cioè *la somma dei prodotti delle Masse elastiche nei quadrati delle celeri-*

tà si conserva dopo l' urto quale era prima, ciò che alcuni chiamano *conservazion delle forze*.

II. Trovar la massa d' un corpo elastico tale che posto in mezzo ai due elastici M, m, il corpo M che solo si muove, imprima ad m la massima possibil celerità. Sia y la massa cercata, e poichè M percuote y, dovrà sostituirsi y ad m nella formula di c' (210) ove sarà $c = 0$ perchè y riposa; dunque y dopo l' urto avrà la celerità $c' = \frac{nMC}{M+y}$. Di nuovo, poichè y percuote m con la celerità $\frac{nMC}{M+y}$, dovrà sostituirsi y ad M nella formula stessa di c', ove sarà $C = \frac{nMC}{M+y}$ e $c = 0$ perchè anche m riposa; dunque m dopo l' urto avrà la celerità $c' = \frac{ny \cdot nMC}{(M+y)(y+m)}$, la quale deve essere un massimo. Differenziando dunque (L. 1043), verrà $\frac{dc'}{dy} = \frac{n^2 MC(M+y)(y+m) - n^2 MCy(M+m+2y)}{[(M+y)(y+m)]^2} = 0 = n^2 \times M^2 mC - n^2 MCy^2$, cioè $y = \sqrt{Mm}$, valore che esprime un massimo (L. 1044); onde la massa cercata y dee esser media proporzionale tra le due date (L. 582.).

III. Trovar la celerità C' di M dopo l' urto quando l' altro corpo m è un ostacolo insuperabile in quiete. Sarà dunque $c = 0$ e l' ostacolo insuperabile $m = \infty$, onde (210) $C' = C - \frac{n\infty C}{M+\infty} = C - nC = (1-n)C$ (L. 269.), e $c' = \frac{nMC}{M+\infty} = 0$ (L. 266. 267), cioè se $n = 1$ ovvero se i corpi son perfettamente molli, si ha $C' = 0$ e ambedue i corpi restano dopo l' urto in quiete; se $n = 2$ ovvero se i corpi son perfettamente elastici, si ha $C' = -C$, ed M torna indietro con la sua celerità primitiva, restando m nella sua quiete; o se $n > 1$ e < 2, avvero se i corpi sono imperfettamente elastici, il corpo M torna indietro con una celerità tanto minore della primitiva quanto è più grande l' imperfezione della sua elasticità.

FIG. 215. Da questo problema nasce la prima nozione del *moto riflesso* per cui i mobili all' incontrar d' un ostacolo smisurato, son ripercossi dopo l' urto e perdono la prima lor direzione. Si impara dunque di quì che un corpo investendone direttamente un altro che non può smuovere, 1°. se sia molle, perde ogni moto e non si riflette; 2°. se sia elastico, si riflette, ma non torna esattamente al luogo d' onde partì se non nel caso d' una perfetta elasticità. E si osservi che per produrre in un corpo elastico la riflessione, non sempre è necessario di farlo urtare in una massa enorme ed immobile: anzi se sia $M = m$, o $C = \frac{mc}{M}$, o $C = c$ e di più $M = 3m$ ovvero $3M = m$ ec., in tutti questi casi si avranno delle riflessioni o nell' uno o nell' altro o in ambedue i corpi: per altro il moto riflesso ordinariamente si considera nel solo caso della quiete ed insuperabilità d' un ostacolo.

216. Vengo all' urto obliquo ed avverto di passaggio che se un corpo qualunque m in riposo riceva un urto obliquamente o per una direzione che non passi per il suo centro di gravità, oltre il moto uniforme di projezione a seconda dell' impulso che ha ricevuto (6), dee concepirne un altro parimente uniforme di rotazione intorno al suo medesimo centro; poichè la forza obliquamente impressa equivale ad un peso aggiunto alle molecule d' una parte del corpo, alle quali perciò non posson più fare equilibrio le molecule dell' altra parte (110); quelle dunque si moveranno all' innanzi e queste in conseguenza all' indietro, di modo che l' inerzia perpetuando nell' une e nell' altre il movimento (14), si rivolgeranno tutte insieme intorno ad un asse comune, descriveranno delle circonferenze che avranno per centri i varj punti di quest' asse, e il loro moto sarà necessariamente uniforme (199).

217. Tralasciato però un più pieno esame di questo secondo moto di rotazione, ritorno al primo di projezione e
14. supposto che i due globi M, m si muovano da A, a con le

le direzioni convergenti e con le celerità AO, ao e si in- 14.
contrino in T, cerco le celerità C', c' dopo l' urto. Risolute a tale effetto le date celerità AO, ao nelle AB, AD, ab, ad, l' une parallele e l' altre normali alla linea Oo dei centri (99), è chiaro che AB, ab parallele tra loro non influendo nell' urto, si conserveranno intere dopo di esso, e l' urto sarà prodotto dalle sole BO, bo opposte. Sia dunque $AO = a$, $ao = b$, ed essendo date le direzioni dei globi e perciò noti gli angoli AOB, aob pongasi $AOB = h$, $aob = k$. Fatto il solito raggio $R = 1$, si avrà (L. 757) $BO = C = a \cos h$, $bo = c = b \cos k$, e quindi (210) $C' = a \cos h - \frac{nm(a \cos h \mp b \cos k)}{M + m}$,

$$c' = \frac{nM(a \cos h \mp b \cos k)}{M + m} \pm b \cos k.$$

Prese pertanto $OE = C'$, $oe = c'$ ed alzate da E, e le normali EG, eg eguali ad AB, ab che l' urto non alterò, si avranno le celerità dopo l' urto obliquo espresse dalle diagonali OG, og. Basti un' applicazione di questa dottrina.

218. Trovar la celerità C' e la direzione di M dopo l' urto quando m è un ostacolo insuperabile in riposo. Poichè $c = 0$, $m = \infty$, sarà come sopra (214) $C' = (1 - n)C$, cioè la celerità BO di M diviene zero dopo l' urto se $n = 1$; divien negativa ma eguale alla positiva prima dell' urto se $n = 2$, e divien negativa ma minor della positiva se $n > 1$ e < 2. Onde nei corpi di perfetta mollezza tutta la celerità BO si perde nell' urto, perciò restando intatta la celerità AB (217), il corpo M dopo l' urto scorre con essa lungo la retta OF: ma nei corpi di perfetta elasticità, prolungata l' inalterabile AB in N finchè sia $BN = BA$, la diagonale ON esprimerà la celerità di M dopo l' urto, perchè essendo OB normale ad AN ed $AB = BN$, si avrà $AO = ON$ e l' angolo $AOB = NOB$ (L. 524).

219. Si ha di quì la rimanente teoria del moto riflesso, e si impara che un corpo investendone obliquamente un altro che non può smovere, 1°. se sia perfettamente molle non riflette, e solo scorre per OF perpendicolarmen-

FIG. 14. te alla linea dei centri; 2°. se sia perfettamente elastico si riflette con una celerità ON eguale alla primitiva AO, e fa con OB l' *angolo di riflessione* NOB eguale all' *angolo d' incidenza* AOB.

220. Infine se i corpi che fin qui abbiamo supposti perfettamente elastici o molli, manchino di questa perfezione, non sarà difficile di correggere i risultati del calcolo, riducendosi tutto a determinare n (209). Per maggior semplicità pongo in quiete il corpo m ed osservo con un' esperienza accurata la celerità C' di M dopo l' urto. Sia dunque $M=6$, $m=5$, $C=4$, $c=0$ e mi venga dall' esperienza $C'=2$: avremo pertanto (210) $C'\left(=C-\frac{nmC}{M+m}=4-\frac{20n}{11}\right)=2$, onde $n=\frac{44-22}{20}=\frac{11}{10}$; dunque per questi corpi le celerità dopo l' urto divengono $C'=C-\frac{11m(C\mp c)}{10(M+m)}$, $c'=\frac{11M(C\mp c)}{10(M+m)}\pm c$.

Moto dei solidi nei fluidi.

In tutte le specie di movimento considerate finora si è supposto che i corpi si movessero nel vuoto (17); è tempo ormai di considerare alcune modificazioni che introduce nel moto la resistenza dei mezzi, e parleremo per ora del *moto rifratto* per cui i mobili mentre da un fluido o mezzo passano in un altro mezzo eterogeneo, soffrono un cangiamento o nella celerità, o nella celerità insieme e nella direzione.

221. Passi il solido A normalmente per AB dal mezzo
15. AI nel mezzo IH, l'uno e l' altro tranquilli: riguardando il corpo A e il fluido IH come due masse che si urtano, e chiamata C la celerità del solido, $c=0$ quella del fluido, avremo (210) $C'=C-\frac{nmC}{M+m}$: dal che si deduce 1°. che come il moto dopo l' urto diretto continua nella direzione di prima (208), così *il corpo* A *urtando il fluido* IH *direttamente in* B *continua a muoversi per* BD *nella direzione di* AB: 2°. che la celerità C prima dell' urto riducendosi dopo l' urto a $C'=C\left(1-\frac{nm}{M+m}\right)$, *il corpo* A *nel passaggio dall' uno all' altro fluido perde una porzione della sua celerità primitiva.*

FIG. 15.

222. E qui si osservi che se sieno d, d' le densità dei fluidi AI, IH e v il volume che nell' uno e nell' altro è percosso da A, avremo la massa del fluido $\mu=dv$ quando A passa da HI in IA, e $\mu'=d'v$ quando passa da AI in IH (11); onde posta C la primitiva celerità di A in ambedue i casi, sarà $C'=C\left(1-\frac{ndv}{M+dv}\right)$ nel primo, e $C''=C\left(1-\frac{nd'v}{M+d'v}\right)$ nel secondo. Supposta dunque $C'>C''$ sarebbe $1-\frac{ndv}{M+dv}>1-\frac{nd'v}{M+d'v}$, cioè $\frac{nd'v}{M+d'v}>\frac{ndv}{M+dv}$ cioè $d'>d$, e però *se la densità* d' *del fluido* HI *superi la* d *del fluido* IA, *anche la celerità* C' *con cui* A *uscito da* HI *si muove per* IA, *supererà reciprocamente la* C'' *con cui uscito da* AI *si muove per* IH.

223. Passi ora il corpo E obliquamente da AI in IH con la celerità EB. Risoluta EB nelle due AE ed EI = AB, l' una parallela e l' altra normale alla superficie IG (99), è chiaro che la celerità AE non opponendosi al mezzo resistente IH, non soffrirà cangiamento e si conserverà intera anche dopo il passaggio: ma si è veduto (221) che la celerità normale AB scema e diviene, per esempio, BD; dunque presa BG = AE e alzata in G la normale GK = BD, il corpo urtando in B non potrà continuar per BH, ma dovrà piegarsi in B per seguir la risultante BK (95); dunque *la celerità e la direzione del corpo* E *nel passaggio obliquo da uno in un altro mezzo eterogeneo si cangia*, e il movimento di E chiamasi in questo caso un *movimento rifratto*. Del resto, poichè supposto $d'>d$ si ha

FIG. 15. $C' > C''$ (222), è facile di concludere in generale che *condotta per il punto* B *di passaggio la normale* AD *sulla superficie* IG *dei mezzi contigui, il corpo se ne allontana o vi si avvicina secondo che da un mezzo passa in un altro più o meno denso*. La luce sola comunemente non si rifrange con queste leggi, come a suo luogo vedremo.

224. Tutto ciò guiderebbe naturalmente a cercar la quantità della forza perduta da un corpo allorchè si muove in un fluido, ovvero la resistenza che gli vien fatta dal fluido: ma questo problema che è comune egualmente ai solidi, che si muovon tra i fluidi, e ai fluidi che scorron per mezzo ai solidi, appartiene più propriamente all' Idromeccanica ove se ne troverà una piena e dettagliata soluzione.

PARTE SECONDA

TEORÌA DELLE MACCHINE

Natura delle Macchine.

225. Tutto ciò che o trasmette o regola o accresce o diminuisce l' azione d' una forza movente dicesi *Macchina*. Così la conoide dei comuni orologj portatili che con le spire più strette diminuisce l' azion della molla, che l' accresce con le più larghe, che la regola con l' une e con l' altre, che la trasmette con la gran ruota della sua base, è una macchina in tutti e quattro i significati.

226. Ma poichè dei varj oggetti che può avere una macchina, il più interessante è l' aumento dell' azion d' una forza, perciò la teoria si occupa principalmente in determinare come una forza qualunque f possa rendersi capace di vincere una qualunque resistenza r: anzi siccome, se f, r possan ridursi una volta all' aquilibrio, è subito in

nostra mano di far prevalere f ad r sol che si aumenti la forza f o il suo momento se la resistenza sia data, oppur si scemi la resistenza r o il suo momento se sia data la forza; perciò il vero e general problema che nella teoria delle macchine si propone a risolvere, si riduce in somma a *trovar l' equilibrio tra una forza qualunque* f *ed una qualunque resistenza* r. Ora le macchine sciolgono questo problema, e presentano in mille modi diversi un punto d' appoggio p, intorno a cui si può far l' equilibrio tra f ed r.

L' idea d' una macchina comprende dunque essenzialmente tre cose: la forza motrice f, la resistenza r da vincersi, e il punto p d' appoggio, che è comune alla resistenza ed alla forza.

227. La *forza* è quì tutto ciò che può produrre un movimento uniforme, e secondo le varie occorrenze a cui si destinan le macchine, è l' urto momentaneo sempre ripetuto e sempre estinto ora d' un fluido, ora d' una molla, ora d' un corpo grave, ora d' un animale ec., ed è poi sempre una massa m moltiplicata per una celerità c, onde $f = mc$ (19). Si son fatte molte ricerche sul modo di stimar le forze applicate alle macchine, e si è creduto di poter tutto ristringere in una o due formule generali: ma noi non ne faremo alcun uso, troppo persuasi che non è possibile di generalizzare in questo proposito senza esporsi ad incredibili errori. Ci contentiamo dunque di avvertire che da molte esperienze si è rilevato 1°. che la forza d' un uomo in un travaglio quasi continuo di 6 o 7 ore e con una celerità di 44 pol. in 1″ può stimarsi di lib. 33: 2°. che la forza d' un cavallo in un travaglio di egual durata equivale a quella di 7 uomini ed ascende perciò a lib. 231 supposta la medesima celerità: 3°. che la forza bastante all' equilibrio non passa ordinariamente al moto se non si aumenti d' $\frac{1}{3}$ di se stessa; cosicchè se per l' equilibrio

basti una forza f, vi vorrà per il moto una forza $\frac{4f}{3}$.

228. La *resistenza* è una somma d'ostacoli che fanno contrasto alla forza; e dico *una somma*, perchè non bisogna figurarsi che dal solo sforzo d'un peso risulti la total resistenza che convien superare in una macchina: altri ostacoli or più or meno considerabili e specialmente l'*attrito* e la *rigidezza delle funi*, debbono entrare in calcolo se voglia determinarsi con qualche precisione l'effetto d'una macchina data. Ne parleremo altrove, e intanto osserveremo che la resistenza opponendosi alla forza, è una forza ella medesima ed ha per espressione $r = m'c'$ (19).

229. Il *punto d'appoggio* è il sostegno della forza da una parte e della resistenza dall'altra; perciò può riguardarsi anch'egli come una forza che agisce oppostamente ad f e ad r: spesso è un pernio intorno al quale possono in caso di sbilancio muoversi liberamente senza cangiar di luogo quelle parti della macchina a cui la forza e la resistenza sono applicate.

230. Le macchine sono o *semplici* o *composte*. Le semplici son comunemente sì note che ne stimiamo inutile la descrizione. Si riducono a quattro: la *Leva*, la *Puleggia*, l'*Argano*, il *Piano Inclinato*, e potrebbero tutte ridursi alla sola leva, se alcune circostanze particolari non ci impegnassero a considerarle separatamente. Le composte sono innumerabili, perchè nascono dalle infinite combinazioni che posson farsi delle macchine semplici. Ne daremo in seguito qualche esempio: ma si osservi qui una volta per sempre, che in generale una macchina semplice divien composta col solo applicare una nuova macchina semplice ove dovrebbe applicarsi la forza.

231. Del resto, semplice o composta che sia una macchina, poichè la condizione dell'equilibrio cercato (226) esige che le forze contrarie o le loro azioni si eguaglino onde in generale si abbia $f = r$ (109), sarà anche $mc = m'c'$ (227. 228), ed $m : m' :: c' : c$, cioè quanto la massa m

FIG.

della forza è minore della massa m' della resistenza, tanto la celerità c' della resistenza sarà minore della celerità c della forza se ambedue vengano a muoversi: onde *in tutte le macchine se dall'equilibrio si passi al moto, l'aumento dell'azion della forza o la facilità d'ottenere un effetto, è sempre a spese della prontezza e conseguentemente del tempo che conviene impiegare per ottenerlo*.

232. Molti Scrittori hanno stabilito sull'equazione $mc = m'c'$ il fondamento della Statica, e calcolando lo spazio che in tempo eguale sarebbe trascorso dalla forza e dalla resistenza, hanno dedotte di là le particolari condizioni dell'equilibrio in tutte le macchine. Noi benchè col rimanente dei Meccanici più famosi abbiamo sostituito a quell'equazione un principio rigoroso e diretto, siamo però tanto lontani dal credere assurda l'ipotesi d'un moto nella considerazione dell'equilibrio, come parve a taluno, che ne faremo anzi qualche uso nel seguito, e tra i problemi proposti in fine per esercizio degli Studiosi, ne inseriremo espressamente alcuni da sciogliersi con quell'equazione o ipotesi, onde se ne vedano l'applcazioni ed i vantaggi.

Leva.

La Leva è una verga inflessibile o retta o curva, di legno, di ferro o d'altra materia adattata all'uso che se ne vuol fare, ma sempre d'una grossezza e d'una durezza che quantunque non si possan determinar teoricamente, debbon però fissarsi per esperienza, e proporzionarsi in generale alla lunghezza della leva, alla materia onde è fatta e agli sforzi a cui è destinata.

233. Già si sa che sospendendo verticali il peso R e la forza F, l'uno in B, l'altra in A, e *collocando la linea retta o curva* AB (poichè prescindiamo per ora dal peso della leva che perciò diventa una linea, e la teoria si applica egualmente alla retta ed alla curva) *sul punto d'ap-* 16.

FIG. 16. poggio p *in modo che il centro* C *di gravità, comune ad* R *e ad* F*, coincida con* p, *la forza* F $(=f)$ *sarà in equilibrio con la resistenza* R $(=r)$, onde rappresentando f con AF ed r con BR, si avrà AF : BR :: CB : CA ovvero $f.\,AC = r.\,CB$ (111). Ma se restando F, R in uno stesso piano e inclinandosi parallelamente come F', R' o divergendo come F'', R', escano dalla direzion verticale, in qual modo potrà determinarsi la condizione del loro equilibrio?

234. I. Sieno le forze parallele $F' = f$, $R' = r$ rappresentate da $AF' = AF$, $BR' = BR$. Risolvo (99) AF', BR' nelle AH, BI normali e nelle HF', IR' parallele alla leva o alla sua tangente AB, le quali suppongo annullate dalla struttura del pernio p (229); e la forza AF' agirà con la sola AH e la resistenza BR' con la sola BI: ma i triangoli rettangoli F'HA, R'IB che attese le parallele son simili, danno AH : BI :: AF' : BR' :: AF : BR (233): dunque se le forze AF, BR sieno in equilibrio, vi saranno anche le AH, BI e quindi anche le AF', BR' cioè *le forze parallele* F', R' *situate in uno stesso piano hanno la medesima condizion d'equilibrio che le verticali*.

235. II. Sieno ora le divergenti $F'' = f$, $R' = r$ rappresentate da $AF'' = AF$, $BR' = BR$. Le risolvo come sopra, e la forza AF'' agirà con la sola $AK = f.\,sen\,AF''K$, e la resistenza BR' con la sola $BI = r.\,sen\,BR'I$ (L. 758), posto il raggio $R = 1$: dal che già si vede che non essendo sempre simili come prima i triangoli F''KA, R'IB, l'equilibrio tra F'' ed R' non può più farsi col punto d'appoggio in C. Supposto dunque D il nuovo punto d'appoggio delle forze $f.\,sen\,AF''K = AK$, $r.\,sen\,BR'I = BI$, si avrà (233) $AK.\,AD = BI.\,BD = BI\,(AB - AD)$, e quindi $AD = \frac{AB.\,BI}{AK + BI}$ che determina il punto D: e come le divergenti AF'', BR' agiscono con le sole verticali AK, BI, il punto D sarà anche l'appoggio delle AF'', BR'. Che se da D si conducano le normali DG, DE sulle direzioni

di

FIG. 16.

di F'', R', i triangoli simili AKF'', DGA e BIR', DEB daranno AD : DG :: AF'' : AK e BD : DE :: BR' : BI, cioè

$$f.\,DG = \frac{AB.BI.AK}{AK+BI} \text{ ed } r.\,DE = BI\,\left(AB - \frac{AB.BI}{AK+BI}\right) = \frac{AB.AK.BI}{AK+BI}$$

; dunque $f.\,DG = r.\,DE$ ed $f : r :: DE : DG$, cioè in generale *la forza e la resistenza situate in un medesimo piano sono in equilibrio quando stanno tra loro inversamente come le normali che dal punto d'appoggio cadono sulle lor direzioni*.

236. Ciò si avvera in una leva qualunque; nondimeno gli antichi Meccanici distinsero la leva in tre generi. La chiamarono *del primo genere* quando p è tra f ed r, *del secondo genere* quando r è tra p ed f, *del terzo genere* quando f è tra p ed r. Ma f, r, p, essendo insomma tre vere forze (227. 228. 229) due delle quali in caso d'equilibrio son distrutte dall'altra, la distinzione delle tre leve potrebbe tralasciarsi come superflua, se la comodità di determinar con chiarezza i diversi acquisti e perdite d'azione in queste forze, non ci inducesse a ritenerla. Supporremo però sempre che f ed r agiscano verticalmente: in caso diverso, i principj già stabiliti per l'azione obliqua (235) determineranno con egual facilità l'equilibrio.

237. Leva del primo genere. Sia la leva AB d'un qualunque peso uniforme, che riunendosi tutto nel punto di mezzo o centro C di gravità (110. 113), può riguardarsi come una nuova o forza o resistenza G applicata alla leva. 17.

Sia la lunghezza della leva $AB = 2a$, la sua densità $g = \frac{m}{v}$ (11) onde essendo $v = 2a$, sarà il suo peso o massa $m = G = 2ag$, e vogliasi la distanza $Cp = x$ del centro C da un tal punto d'appoggio p che sopra di lui tutto il sistema sia in equilibrio e si abbia perciò (104) $F.\,Ap = R.\,Bp + G.\,Cp$. Sarà dunque $CA = CB = a$, $Ap = a - x$, $Bp = a + x$, e quindi $f\,(a - x) = r\,(a + x) + 2agx$; pertan-

FIG.

tanto I^a. $x = \frac{a(f-r)}{f+r+2ag}$; II^a. $f = \frac{r(a+x)+2agx}{a-x}$.

238. Dunque 1°. se nella prima equazione sia $f > r$, avremo
17. x quantità positiva e il punto d' appoggio p sarà tra C ed F. La quantità della forza necessaria all' equilibrio si ha dalla seconda equazione, ove se $x (= Cp) = a = CA$, cioè se p cada in A, sarà $f = \frac{2ar+2a^2g}{0} = \infty$ (L. 270) e vi vorrà una forza infinita per aver l' equilibrio; se $x = \frac{a}{2}$, sarà $f = 3r + 2ag$; se $x = \frac{a}{3}$, sarà $f = 2r + ag$; e se $x = 0$, cioè se p cada in C, sarà $f = r$. Onde può dirsi in generale che essendo p tra C ed F, 1°. la forza bisognevole all' equilibrio cresce a misura che p si accosta ad F; 2°. il peso $2ag$ della leva è una nuova resistenza da vincersi, giacchè quand' anche la resistenza R svanisca e sia $r = 0$, l' equilibrio esige sempre $f = \frac{2agx}{a-x}$: 3°. la forza f scemerà come $2ag$, e perciò la materia onde è fatta la leva, dee avere la minor densità possibile relativamente agli sforzi da sostenersi.

239. Dunque 2°. se nella I^a. equazione sia $f = r$, avremo $x (= Cp) = 0$ (L. 271) e il punto d' appoggio p caderà in C, come già si è trovato; onde in questo caso il peso della leva che svanisce nella II^a. equazione, dee considerarsi per nullo.

240. Dunque 3°. se nella I^a. sia $f < r$, avremo x quantità negativa e il punto d' appoggio p' sarà tra C ed R. Cangiati pertanto i segni ad x nella II^a., verrà $f = \frac{r(a-x)-2agx}{a+x}$: quindi se $x = 0$, cioè se p' cada in C, sarà $f = r$ come sopra; se $x = \frac{a}{3}$, sarà $f = \frac{r-ag}{2}$; se $x = \frac{a}{2}$, sarà $f = \frac{r-2ag}{3}$; se $x = a = CB$, cioè se p' cada in B, sarà $f = -ag$, e non solo vi vorrà forza alcuna positiva per l' equilibrio, ma converrà adoperarne una negativa all' insù che eguagli la metà del peso della leva, e la leva diventerà del secondo genere. Concludasi dunque in generale che essendo p' tra C ed R 1°. la forza bisognevole all' equilibrio

FIG.

diminuisce a misura che p' si accosta ad R; 2°. il peso $2ag$ 17.
della leva è favorevole alla forza, mentre quando pur la forza F svanisca e sia $f = 0$, il solo peso della leva può in certi casi fare equilibrio alla resistenza, come risulta dall' equazione $0 = \frac{r(a-x)-2agx}{a+x}$, ovvero $r(a-x) = 2agx$.

241. Leva del secondo genere. Supposte tutte le denominazioni di prima, vogliasi la distanza $AB = x$ della forza F 18.
da un tal punro B, che posta in B la resistenza, tutto il sistema sia in equilibrio e si abbia al solito $F . Ap = R \times Bp + G . Cp$. Sarà dunque $AC = Cp = a$, $Bp = 2a - x$, e $2af = r(2a - x) + 2a^2g$; onde I^a. $x = \frac{2a(ag+r-f)}{r}$; II^a. $f = r + ag - \frac{rx}{2a}$.

242. Dunque 1°. dalla prima equazione si impara che in questa leva non sarà mai $f > ag + r$, altrimenti $x (= AB)$ diventerebbe negativo e la resistenza caderebbe fuori di pA: onde *nella leva del secondo genere la forza non è mai più grande della resistenza totale*.

243. Dunque 2°. la quantità della forza necessaria all' equilibrio si ha dalla seconda equazione, ove se $x = 0$, cioè se R cada in A, sarà $f = r + ag$; se $x = \frac{2a}{3}$, sarà $f = \frac{2r}{3} + ag$; se $x = a$, cioè se R cada in C, sara $f = \frac{r}{2} + ag$; se $x = 2a$, cioè se R cada in p, sarà $f = ag$. Può dirsi pertanto in generale che la forza bisognevole all' equilibrio diminuisce a misura che R si accosta a p.

244. Dunque 3°. se sia data $Bp = b$ e sia ignota $Ap = 2z$, avremo $Cp = z$ e $2fz = br + 2gz^2$, onde $f = \frac{br}{2z} + gz$,

ove se $z=0$, si ha $f=\frac{br}{0}=\infty$, e se $z=\infty$, si ha $f=\infty g$, cioè tanto nel caso di una leva cortissima o nulla, quanto in quello di una leva lunghissima o infinita, è necessaria per l'equilibrio una forza estremamente grande. Quindi per determinar la lunghezza $Ap=2z$ della
18. leva onde si abbia l'equilibrio con la minima forza possibile, differenzierò l'equazione $f=\frac{br}{2z}+gz$ ed avrò $\frac{df}{dz}=g-\frac{br}{2z^2}=0$ (L. 1043), e quindi $2z=\sqrt{\frac{2br}{g}}$ ed $f=\sqrt{2bgr}$, minimo cercato (L. 1044); dunque una leva del secondo genere più lunga o più corta di $\sqrt{\frac{2br}{g}}$ non può impiegarsi senza scapito della forza, quando è fissato il punto B della resistenza. Quanto alla densità g che entra nella formula $\sqrt{\frac{2br}{g}}$ della lunghezza della leva, ella si avrà dalla *Tavola della densità o gravità specifiche* che si è posta al fin di quest' Opera.

245. Leva del terzo genere. Ritenute tutte le denominazioni di prima, vogliasi la distanza $BA=x$ della resistenza R
19. za R da un tal punto A, che posta la forza in A, tutto il sistema sia in equilibrio e si abbia come sopra $F \,.\, Ap = R \times Bp + G \,.\, Cp$. Sarà dunque $BC=Cp=a$, $Ap=2a-x$, onde $f(2a-x)=2ar+2a^2g$, ed $x=\frac{2a(f-r-ag)}{f}$.

246. Dunque nella leva del terzo genere non sarà mai $f<ag+r$, altrimenti x (= BA) diverrebbe negativo e la forza F sarebbe fuori di pB; onde *questa leva è sempre svantaggiosa alla forza*. Si troverà $f=r+ag$ se A cada in B, come nella leva del secondo genere, ed $f=\infty$ se A cada in p, come nella leva del primo.

Abbiamo gli esempj delle leve del terzo genere nei pedali dell'organo e dell'arpa, nelle calcole dei telaj, in molte specie di filatoj, nelle macchine degli Arrotini, nel braccio umano allorchè stendendosi orizzontalmente sostiene un peso nella sua estremità ec.; di quelle del secondo genere nei remi e negli alberi delle navi, nelle porte, nei mozzi delle campane, nelle mascelle degli animali, ec.; di quelle del primo genere nelle cesoje, nelle tanaglie, nelle morse, nella parte curva dei martelli, e specialmente nella *Bilancia* e nella *Stadera*, due macchine che il quotidiano commercio rende meritevoli d'una particolare attenzione.

Si sa come ordinariamente si fabbrica una bilancia, ma tutti forse non sanno le qualità che debbono accompagnarla affinchè mostri con esattezza e senza molto travaglio il vero peso d'una data merce.

247. I. Primieramente in una perfetta Bilancia l'*ago* 20.
Lp normale all'*asta* AB dee conservarsi verticale, e l'asta medesima dee perciò essere orizzontale non meno quando i *piatti* F, R, son vuoti che quando son caricati da pesi eguali. Supposto dunque per maggiore universalità che il centro G di gravità della macchina sia nella normale CG diversa dalla verticale LO, e che pG unisca i centri di moto e di gravità p, G, chiamo f', r' il peso dei piatti F, R e delle lor corde, anelli ec., f la merce che nel piatto F si vuol pesare, r il peso da porsi in R per aver l'equilibrio, g il peso dell'asta AB, e fatta $AB=2a$, $Bp=x$, $Ap=2a-x$, dovrà essere nel caso dei piatti vuoti $f' \,.\, Ap = r' \,.\, Bp + g \,.\, Cp$, e nel caso dei piatti caricati da f, r dovrà aversi $(f+f')\,Ap=(r+r')\,Bp+g \,.\, Cp$. Ora se da questa si tolga la prima equazione, resterà $f \,.\, Ap = r \,.\, Bp$, cioè $2af-fx=rx$ ed $x=\frac{2af}{f+r}$; dunque se $f=r$, come dee esserlo nella bilancia, si avrà $x=a=\frac{AB}{2}$.

248. Dunque 1°. *non può esservi eguaglianza tra il peso e la merce se le braccia* Ap, Bp *della bilancia non sieno eguali*; e però se caricando i piatti in modo che l'asta s'incurvi, la curvatura delle due braccia non sia la stessa,

FIG.

diverranno esse ineguali e la bilancia mentirà quantunque ben costruita: ma si scuoprirà in generale la frode sol che
20. si trasporti la merce in R e il peso in F; perchè è chiaro che il peso più grave applicato al braccio più lungo farà subito sparire l' equilibrio.

249. Dunque 2°. *non è punto necessario che le braccia* Ap, Bp *sieno egualmente pesanti*, e purchè il peso f', r' dei piatti e lor dipendenze produca l' orizzontalità dell' asta AB, *è indifferente per l' equilibrio che il centro* G *di gravità sia in* LO *o in* CG: ma se sia in LO, la bilancia sarà migliore, come vedremo.

250. II. In secondo luogo la perfetta bilancia nè deve esser *pazza* inclinandosi stranamente ad ogni più piccola ineguaglianza tra f ed r, nè deve esser *sorda* mantenendo l' equilibrio tra f ed r sensibilmente ineguali. Ritenute pertanto le denominazioni di sopra ed aggiunta in F una merce f'' che conduca la bilancia in apb e perciò anche pG in pH, sia l' angolo Dpa = GpH = n, il dato OpG = c, onde IpH = $90° - n - c$ e pHI = HpO (L. 500) = $n + c$, Ap = $ap = a$, pG = pH = h, ed avremo (L. 757. 758) Dp = Kp = $a \cos n$, Ip = h $sen\ (n + c) = h\ (sen\ n \cos c + sen\ c \cos n)$ (L. 703), fatto R = 1. Ora nella situazione apb il sistema è per ipotesi in equilibrio; dunque ricordandosi che $f = r$ per la natura della bilancia, si avrà $(f + f' + f'')\, a \cos n = (f + r')\, a \cos n + gh\,(sen\ n \cos c + sen\ c \cos n)$: ma quando $f'' = 0$; la bilancia è in ApB onde $(f + f')\, a = (f + r')\, a + gh \times sen\ c$ (247) e però $gh\ sen\ c = (f' - r')\, a$; dunque sostituendo questo valore nella prima equazione e riducendo, verrà

$$\frac{sen\ n}{\cos n}\ (= tang\ n) = \frac{af''}{gh \cos c} = \frac{f''}{\frac{h}{a}\, g \cos c}.$$

251. Dunque 1°. poichè $tang\ n$ è tanto più grande (supposte tutte l' altre cose eguali) quanto è più piccolo il termine $\frac{h}{a}\, g \cos c$ (L. 48), e questo è tanto più piccolo quanto a è più grande, *la bilancia* farà tanto più facilmente l'

FIG.

angolo Apa, cioè *sarà tanto men sorda quanto le sue braccia saranno più lunghe*, purchè non s' incurvino. 20.

252. Dunque 2°. se il centro G di gravità cada nell' asta AB, sarà l' angolo OpG = c = 90°, $\cos c = 0$ (L. 692), $tang\ n = \frac{af''}{0} = \infty$ (L. 270) ed n = 90° (L. 700) cioè la bilancia con l' aggiunta della più piccola merce f'' traboccherà interamente; si eviterà pertanto questo disordine costruendo la bilancia in modo che i quattro punti A, p, G, B non si trovino insieme in una stessa linea retta. E poichè $tang\ n$ è tanto più piccola quanto $\cos c$ è più grande (L. 48), *la bilancia sarà tanto men pazza quanto è più piccolo l' angolo* OpG (L. 692): ed ecco perchè si è detto (249) che ella è migliore quando G cade in LO, e lo vedremo ancor nuovamente.

253. III. Infine se una forza straniera φ urtando nell' asta AB ne abbia alterata l' orizzontalità, la perfetta bilancia dee subito ricuperarla con la forza stessa φ. Supposto dunque che φ normalmente applicata ad una distanza qualunque pE = m, possa tener la bilancia nella situazione apb sarà $(f + f')\, a \cos n + \varphi m = (f + r')\, a \cos n + gh\,(sen\ n \cos c + sen\ c \cos n)$, e poichè $gh\ sen\ c = (f' - r')\, a$ (250), sostituendo e riducendo si troverà $\varphi m = gh \cos c \times sen\ n$.

254. Dunque poichè φm è tanto più grande quanto è più grande o $sen\ n$ o $\cos c$ o h, e $sen\ n$ cresce a misura che cresce o l' angolo Dpa = n o il raggio $ap = a$ (L. 692), e $\cos c$ cresce a misura che o cresce il raggio pG = h o scema l' angolo OpG = c (L. 692), *la bilancia ricupererà tanto più facilmente la posizione orizzontale* 1°. *quanto più ne sarà stata rimossa*; 2°. *quanto saranno più lunghe le sue braccia*; 3° *quanto più sarà* G *vicino ad* LO; 4°. *quanto più sarà* G *lontano da* p.

255. Poco vi è da dire sulla Stadera, la quale per altro se sia ben divisa riesce più comoda e più durevole della bilancia medesima, perchè logora meno il punto d' appog-

FIG.

gio e determina con un solo peso la gravezza di merci diversamente pesanti. Sia f' il peso del *piatto* vuoto F e del-
21. le sue dipendenze, f la merce che vuol pesarsi, r il peso del *romano* R, ed il peso dell' asta uniforme Am riunito nel suo centro di gravità C sia g. Supposto che il romano situato in o faccia equilibrio col piatto vuoto f', e situato in m lo faccia con la merce f, si avrà 1°. $f' . Ap = r . op + g . Cp$; 2°. $(f + f') Ap = r . pm \; (= r . \overline{po + om}) + g \times Cp$. Sottratta la prima equazione dalla seconda, si trova $f . Ap = r . om$, ed $f = \frac{r . om}{Ap}$.

256. Dunque 1°. diviso il *braccio om* in n parti eguali $oi = ik = kl$ ec. $= Ap$, sarà $ok = 2Ap$, $ol = 3Ap$ ec., e in generale $om = nAp$, onde $f = \frac{r . am}{Ap} = nr$.

257. Dunque 2°. se il romano pesi una libbra e posto in k faccia equilibrio con f, sarà $r = 1$, $n = 2$ ed $f = nr = 2^{\text{lib.}}$; se il romano pesi due libbre e posto in l faccia equilibrio con f, sarà $r = 2$, $n = 3$ ed $f = nr = 6^{\text{lib.}}$ ec.

258. Dunque 3°. moltiplicando le divisioni di om, potrà pesarsi qualunque parte ancor minima della libbra: ma non pesandosi comunemente nella stadera merce alcuna minore dell' oncia, se sia $r = 1$ basterà divider ciascuno spazio oi, ik, kl ec. in 12 parti eguali; se sia $r = 2$, diviso primieramente in mezzo ciascuno spazio oi, ik, kl ec., si dividerà poi ciascuna metà in 12 parti eguali ec.

Puleggia.

259. La Puleggia o è *fissa* o è *mobile*. La fissa è una leva del primo genere il cui punto d' appoggio è in p, la
22. resistenza in R, la forza in F: onde poichè Ap è sempre normale alla tangente AF (L. 497), si avrà sempre in caso d' equilibrio $F . Ap = R . Bp$ (235): ma $Ap = Bp$; dunque $F = R$, cioè *la puleggia fissa non apporta alcun vantaggio alla forza e serve solo a cangiarne la direzione.*

260. Non

FIG.

260. Non così quando la puleggia è mobile; allora ella diviene una leva del secondo genere, il cui punto d' appog-
gio B ove è fissata la fune, si riferisce al punto di contat- 23.
to in p, la resistenza verticale r a cui dee sempre aggiungersi il peso della puleggia, è in R, e la forza obliqua o verticale f è in F. Condotti dunque il raggio Cp, la corda pA ai punti di contatto A, p, e la normale pE sulla direzione FE della forza, i triangoli rettangoli simili CpD, ApE (L. 504) daranno $Cp : pD :: Ap : pE$, e fatto $Cp = a$, l' angolo $pCD = pAE = x$, e però $Ap = 2 \, sen \, x$ (L. 686) posto il raggio $R = a$, la condizione dell' equilibrio esige (235) $f : r :: pD : pE :: Cp \, (a) : Ap \, (2 \, sen \, x)$, onde $f = \frac{ar}{2 \, sen \, x}$. Se ora per aver la forza minima si differenzj quest' equazione, verrà (L. 1011) $\frac{df}{dx} = \frac{-ar \cos x}{2 \, sen^2 x} = 0$, e perciò 1°. $-\cos x = 0$ che è un minimo (L. 1044), onde $x = 90°$ (L. 692), cioè *la forza è minima nella puleggia mobile quando l' angolo* pCD *è retto*; allora $sen \, x = a$, $f = \frac{r}{2}$, e le funi Bp, FA son parallele alla direzione della resistenza: 2°. $sen^2 x = 0$ ovvero $sen \, x = \frac{Ap}{2} = 0$, massimo che dà $f = \frac{ar}{0} = \infty$, cioè divenendo piccolissima o nulla la leva Ap, è necessaria per l' equilibrio una forza grandissima o infinita, come appunto trovammo nella leva del secondo genere (244). Quindi la puleggia mobile favorisce la forza finchè Ap non diventa il lato dell' esagono, nel qual caso abbiamo $Ap = 2 \, sen \, x = a$ (L. 542) ed $f = r$: da questo punto in giù l' equilibrio esige una forza sempre più grande della resistenza.

261. Dunque 1°. in un sistema di puleggie mobili ove
ciascuna è sostenuta da una distinta fune in tal guisa che 24.
fa figura e di resistenza riguardo alla superiore, e di forza riguardo all' inferiore, chiamate r'', r', r le resistenze o forze in R'', R', R e posti a'', a', a i raggi delle puleg-

gie e $2\,sen\,x''$, $2\,sen\,x'$, $2\,sen\,x$ le corde degli archi circondati dalla fune, avremo in caso d'equilibrio (260) $f = \frac{a'' r'}{2\,sen\,x''}$, $r'' = \frac{a' r'}{2\,sen\,x'}$, $r' = \frac{ar}{2\,sen\,x}$, onde $f = \frac{a'' r''}{2\,sen\,x''} = \frac{a''\ a'\ r'}{4\,sen\,x''\ sen\,x'} = \frac{a''\ a'\ ar}{8\,sen\,x''\ sen\,x'\ sen\,x}$. Quindi se le funi sieno parallele alla direzione della resistenza e perciò $sen\,x = a$, $sen\,x' = a'$, $sen\,x'' = a''$ (260), verrà $f = \frac{r}{8} = \frac{r}{2^3}$, cioè in generale *quando in questo sistema le funi son parallele, la forza sta alla resistenza come l'unità a quella potenza di 2 che ha per esponente il numero delle puleggie mobili*.

262. Dunque 2°. in un sistema orizzontale di puleggie
25 mobili ove ciascuna è sostenuta da una fune medesima, e portando insieme col nodo R′ una porzione R′′′′, R′′′, R′′ del peso $R = r$, fa solamente figura di resistenza, è manifesto che nel caso d'equilibrio la fune dee per tutto esser tesa egualmente, e perciò le forze F, F′, F′′ ec. debbon tutte eguagliarsi tra loro. Ritenute pertanto le solite denominazioni, avremo (260) $F = \frac{a''\,R''''}{2\,sen\,x''}$, $F' = F'' = \frac{a'\,R'''}{2\,sen\,x'}$, $F''' = F'''' = \frac{a\,R''}{2\,sen\,x}$ ed $F''''' = R'$ (259), ovvero poichè $F = F' = F''$ ec. $= f$, sarà $\frac{2f\,sen\,x''}{a''} + \frac{2f\,sen\,x'}{a'} + \frac{2f\,sen\,x}{a} + f = R'''' + R''' + R'' + R' = R = r$. Quindi se le funi sieno parallele al solito, e però $sen\,x'' = a''$, $sen\,x' = a'$ ec., si troverà $f = \frac{r}{7}$, cioè *quando in questo sistema lo funi son parallele, la forza sta alla resistenza come l'unità al numero delle funi che sostengono il sistema mobile*.

263. Vale la legge stessa anche per un sistema vertica-

le di puleggie mobili: ma allora i diametri delle puleggie 26.
debbono esser necessariamente ineguali, e se le funi si vogliano parallele alla direzione della resistenza, bisogna che questi diametri crescano in una progressione aritmetica la cui differenza sia il diametro della puleggia minima.

Argano.

264. L'Argano o sia perpendicolare all'orizzonte o gli sia parallelo (nel qual caso più propriamente si chiama *Burbera*) è sempre una leva del primo genere il cui punto d'
appoggio p, p', p'' ec. è in tutto l'asse CE del cilindro 27.
pB, la forza è nell'estremità D del raggio pD, e la resistenza è nell'estremità B del raggio pB in cui si intende compreso anche il raggio della fune BR.

265. Poichè dunque la connessione e la solidità delle parti tutte dell'argano manifestamente riunisce insieme quanto all'effetto i punti p, p', p'' ec., si avrà l'equilibrio in questa macchina subitochè le normali condotte dal punto d'appoggio p sulle direzioni della resistenza R e della forza F, saranno inversamente come F ad R (235). Ora la normale sulla direzione verticale BR è il raggio orizzontale $pB = a$, e la normale sulla direzione DF che è sempre tangente al circolo, è il raggio $pD = A$; dunque $f : r :: a : A$, e però $f = \frac{ar}{A}$, cioè *la forza nell'argano sta alla resistenza, come la somma dei raggi del cilindro e della fune al raggio del circolo o ruota* GKD.

266. Chi deducesse di quì che l'effetto di questa macchina può dunque aumentarsi indefinitamente sol che si accorci il raggio Bp e si allunghi il raggio pD, ragionerebbe bene per l'equilibrio, ma si ingannerebbe sul movimento; poichè il più grande effetto possibile, per esempio la celerità della resistenza R, non può ottenersi nell'argano ed anche in altre macchine, se i raggi pD, Bp non abbian

FIG. tra loro una proporzione determinata. Infatti posta c la celerità ed mc l'espressione della forza f, è chiaro che ella perderà nell'equilibrio (232) tanta celerità x o tanta forza mx quanta è la contraria celerità z o forza $m'z$ della resistenza r (16), onde se venga a muoversi avrà la sola
27. celerità $c - x$: ma mentre il raggio pD con la celerità $c - x$ della forza, fa un giro Π, il raggio pB con la celerità z della resistenza ne fa uno π; dunque per la natura del moto uniforme (22) quale dee essere il moto delle macchine (227), $c - x : z :: \Pi : \pi :: A : a$ (L. 594), e $z = \frac{a(c-x)}{A}$: ma la forza mx per ipotesi fa equilibrio alla resistenza $m'z = \frac{am'(c-x)}{A}$; dunque (235) $A . mx = a \times \frac{am'(c-x)}{A}$, $x = \frac{a^2m'c}{A^2m + a^2m'}$ e $z = \frac{Aacm}{A^2m + a^2m'}$ che deve essere un massimo. Differenziando pertanto, presa a per variabile, avremo $\frac{dz}{da} = \frac{(A^2m + a^2m')Acm - 2am'.Aacm}{(A^2m + a^2m')^2} = 0$, onde $A^2m = a^2m'$, massimo cercato (L. 1044), da cui si ottiene $a = A\sqrt{\frac{m}{m'}}$, cioè allora la resistenza si moverà con la massima celerità quando il raggio pD stia al raggio pB come la radice della massa m' della resistenza alla radice della massa m della forza.

267. Se verso C all'opposta estremità del cilindro si fissasse un'altra ruota in dimensioni ed in forze eguale alla prima, si raddoppierebbe l'effetto: e se in luogo delle forze F esteriormente applicate, si facessero camminar degli uomini nel *Tamburo* di queste ruote, non sarebbe difficile di trovar la condizione dell'equilibrio. Imperocchè sia GuH il quadrante della ruota in cui camminano per esempio 3 uomini u, u', H, che suppongo tutti in eguali distanze Gu, uu', $u'H$ e presso a poco d'un'egual massa o peso $u = u' = H = 150^{lib.}$; riferendo ai punti m, m' delle verticali um, $u'm'$ l'azione del loro peso u, una parte u della forza f sarà alla distan-

za mp dal punto p d'appoggio, un'altra parte u alla distan- FIG. 27.
za $m'p$, e l'ultima u alla distanza Hp; dunque la richiesta condizion d'equilibrio per una ruota darebbe $u(mp + m'p + Hp) = r . Bp$ (235), onde per le due ruote insieme si avrà $r \times Bp = 2u\,(mp + m'p + Hp)$: ma $Gu = uu' = u'H = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ$, e però fatto $R = 1$, viene $mp = pu . sen\, 30^\circ$, $m'p = pu' \times sen\, 60^\circ$ (L. 759); dunque $r . Bp = 2u . Hp\,(sen\, 30^\circ + sen\, 60^\circ + 1)$, ovvero $ar = 300\,A\,(sen\, 30^\circ + sen\, 60^\circ + 1)$, cioè i sei uomini faranno equilibrio ad una resistenza $r = \frac{300A}{a}(sen\, 30^\circ + sen\, 60^\circ + 1) = \frac{300A}{a}\left(\frac{1 + cot\, 15^\circ}{2}\right)$ (L. 778).

268. Le *Ruote Dentate* sono un sistema d'argani ove 28.
la resistenza R sospesa al cilindro B non è più sostenuta da una forza applicata alla ruota F″ come nell'argano; ma da un *rocchetto* R′ che la *ingrana*, e la resistenza R′ non è più sostenuta da una forza posta in F′, ma da un nuovo rocchetto R″ che pur la ingrana ec.: cosicchè supposti A, A′, A″ i raggi delle ruote, a, a', a'' quelli dei rocchetti, ed r'', r', r le resistenze o forze in R″, R′, R, avremo nel caso dell'equilibrio (265) $f = \frac{ar''}{A}$, $r'' = \frac{a'r'}{A'}$, $r' = \frac{a''r}{A''}$, onde $f = \frac{aa'r'}{AA'} = \frac{aa'a''r}{AA'A''}$, cioè *nelle ruote dentate la forza sta alla resistenza come il prodotto di tutti i raggi dei rocchetti al prodotto di tutti quelli delle ruote.*

269. Considerando ora questo sistema in movimento, sia N il numero dei denti della ruota F″ da cui suppongo che il moto cominci, ed n il numero dei denti o *ali* del rocchetto R′: è chiaro che mentre F″ fa un giro, R′ e perciò anche F′ ne farà un numero $\frac{N}{n}$ (L. 36): del pari se N′, n' sieno i denti e le ali di F′, R″, mentre F′ farà un giro, R″ ne farà un numero $\frac{N'}{n'}$. Ora se 1 giro di F′ ci dà

FIG.

per R'' i giri $\frac{N'}{n'}$, quanti giri x ci daranno i giri $\frac{N}{n}$? cioè
28. $1 : \frac{N'}{n'} :: \frac{N}{n} : x = \frac{NN'}{nn'}$; dunque per la natura del moto uniforme (22.227), *la celerità della prima ruota* F'' *sta a quella dell'ultimo rocchetto* R'' $:: 1 : \frac{NN'}{nn'} :: nn' : NN'$, o in generale *come il prodotto del numero dell'ali di tutti i rocchetti al prodotto del numero dei denti di tutte le ruote*. Ecco qualche applicazione di questa dottrina.

270. I. Date le ruote F'', F' e i rocchetti R', R'' trovare un tal numero di denti per quelle e di ali per questi, che mentre F'' fa un giro, R'' ne faccia 60. Si avrà dunque $x = \frac{NN'}{nn'} = 60$, e poichè N, N', n, n' son tutte indeterminate, pongo nn' eguale ad un numero composto di due fattori talmente proporzionati alla data grandezza de' due rocchetti R', R'', che possa ciascun fattore esprimere il numero delle loro ali: per esempio, fatto $nn' = 7 . 8 = 56$, sarà $\frac{NN'}{7 . 8} = 60$ e quindi $NN' = 56 . 60$; dunque i numeri $N = 60$, $n = 8$, $N' = 56$, $n' = 7$ soddisfaranno al problema.

271. II. Costruire un sistema di ruote dentate in modo che l'ultimo rocchetto faccia un giro in 12 ore mentre la prima ruota lo fa in un anno. Supposti tre rocchetti e tre ruote, poichè l'anno è composto di $8765^{or}\frac{49}{60}$, si avrà $x = \frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{8765^{or}\frac{49}{60}}{12} = \frac{525949}{720}$. Ora è ben vero che fatto $nn'n'' = 720$, questo numero potrebbe risolversi in tre fattori, come 8, 9, 10 ovvero 6, 10, 12, adattati all'ali dei tre rocchetti: ma allora si avrebbe $NN'N'' = 525949$, e questo numero non dà tre fattori egualmente proprj per i denti delle tre ruote. Convien dunque ricorrere ad una approssimazione, e poichè $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{525949}{720} = 730\frac{349}{720}$, pon-

FIG.

go $\frac{349}{720} = \frac{B}{A}$ (L. 58), e trovate le approssimazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{15}{31}$, $\frac{16}{33}$, $\frac{111}{229}$, veggo che niuno dei denominatori può risolversi in tre fattori. Riduco dunque il rotto in decimali e con $\frac{349}{720} = \frac{,4847}{10000} = \frac{B}{A}$ ottengo l'approssimazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{15}{31}$, $\frac{16}{33}$, $\frac{95}{196}$, $\frac{396}{817}$, ove $196 = 4 . 7 . 7$. Fatto dunque $A = nn'n'' = 196$, $B = 95$, viene $730\,A + B = NN'N'' = 143175 = 3.5.5.23.83$, onde $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{3.5.5.23.83}{2.2.7.7} = \frac{2.3.5.5.23.83}{2.2.2.7.7} = \frac{50.69.83}{7.7.8}$, numeri egualmente proprj e per i denti delle tre ruote e per l'ali dei tre rocchetti, senza che l'approssimazione pregiudichi all'esattezza; poichè dovendo essere $8765^{or}, 49' = \frac{12NN'N''}{nn'n''}$, si trova $\frac{12NN'N''}{nn'n''} = \frac{12.50.69.83}{7.7.8} = 8765^{or}, 48', 58'', 46'''$, onde la durata dell'anno appena differirà di $1''\frac{1}{2}$ dal moto della prima ruota che lo rappresenta.

Piano Inclinato.

272. Dopo che si sa (132) che nel Piano Inclinato la re-
sistenza o gravità g si cangia in $\frac{ag}{\lambda}$ e che necessariamente 29
$\lambda (= AD) > a (= AB)$ e perciò anche $g > \frac{ag}{\lambda}$, dee riguardarsi per dimostrato che è questa una macchina tanto più vantaggiosa alla forza, quanto più vi è diminuita l'energia della gravità. Consideriamo dunque il piano inclinato in questo aspetto, e supposto ciò che già ne abbiamo detto (132 ec.), terminiamo di farne conoscere le proprietà.

273. Posta $\lambda = AD$ lunghezza del piano, $n = ADB$ *angolo d'elevazione* del piano sull'orizzonte, e $z = GFC$ *an-*

FIG. 29. golo *d'inclinazione* della forza F sul piano stesso AD, sarà l'altezza $AB = a = \lambda\, sen\, n$, e la base $BD = b = \lambda \cos n$ (L. 759. 760); e se in primo luogo sia $n = o$, avremo $sen\, n = o$, $\cos n = 1$, $AB = a = o$, e $BD = \lambda = AD$, cioè il piano inclinato AD coinciderà con l'orizzontale BD. Ora è evidente che per aver l'equilibrio in questo caso, l'azione del piano BD non solo deve almeno eguagliare, ma anche direttamente opporsi all'azione della gravità che sollecita al moto il centro C ove è riunito tutto il peso del corpo (110); e poichè la gravità lo sollecita per la verticale o *linea di direzione* CM, il piano BD lo dee sostenere oppostamente per la linea stessa MC, cioè *l'equilibrio sopra un piano orizzontale esige che la linea di direzione* CM *passi per qualche punto* M *della base o effettiva o virtuale con cui il corpo si appoggia al piano* BD. Così una muraglia o una torre tuttochè pendenti, non caderanno finchè la loro linea di direzione effettivamente si appoggierà sui fondamenti, nè caderà un uomo o una sedia finchè la linea di direzione passando o per taluno dei lati che uniscono i loro piedi o per lo spazio che quei lati racchiudono, virtualmente si appoggierà sulla base dell'uomo o della sedia. Del resto il piano orizzontale BD è in somma una leva ridotta al suo solo punto d'appoggio M, ove nel caso d'equilibrio la resistenza, cioè la gravità, agisce per CM, e la forza, cioè il piano stesso BD, agisce oppostamente ed egualmente per MC.

274. Ma se il piano AD si stacchi ora da BD e si sollevi onde l'angolo $ADB = n$ sia una quantità positiva, il punto d'appoggio M passerà in p e farà con la linea di direzione CM l'angolo $MCp = BDA = n$; onde condotte da p sulle direzioni CM della resistenza o gravità $= r$, e CF della forza $F = f$, le normali pb pa e preso per raggio $Cp = R$, sarà $pb = sen\, n$, $pa = sen\, pCa = sen\, apF$ (L. 559) $= \cos z$ (L. 789), e la solita condizion d'equilibrio (235) ci darà $f : r :: pb : pa :: sen\, n : \cos z$, cioè *nel piano inclinato la forza alla resistenza sta come il seno dell'angolo d'elevazione al coseno dell'angolo d'inclinazione* e si ha $f = \frac{r\, sen\, n}{\cos z}$.

275. Dunque 1., poichè quanto più impiccolisce $sen\, n$ tanto più scema il valor del rotto $\frac{r\, sen\, n}{\cos z} = f$ (L. 48) si avrà *l'equilibrio nel piano inclinato con una forza tanto più piccola quanto più sarà piccolo l'angolo d'elevazione* $ADB = n$: perciò le scale, le strade montuose ec. son tanto più facili quanto è minore l'angolo della loro elevazione. 29.

276. Dunque 2°. se la direzione FC della forza sia normale alla resistenza CM, cioè parellela alla base BD e perciò $n = z$ sarà $f = \frac{r\, sen\, n}{\cos n}$; e poichè $sen\, n = \frac{a}{\lambda}$, e $\cos n = \frac{b}{\lambda}$ (273), si avrà $f = \frac{ar}{b}$, cioè *se nel piano inclinato la forza agisca normalmente alla resistenza, l'una sarà all'altra come l'altezza del piano alla sua base*.

277. Dunque 3°. se per aver la minima forza possibile si differenzj l'equazione $f = \frac{r\, sen\, n}{\cos z}$, troveremo $\frac{df}{dz} = \ldots \frac{r.\, sen\, n\, sen\, z}{\cos^2 z} = o$, e però $sen\, z = o$, minimo (L. 1044) che dando $\cos z = sen\, pCF = 1$ (L. 692), ci insegna che *nel piano inclinato allora è bastante all'equilibrio la più piccola forza* quando l'angolo pCF è retto, cioè *quando la direzione della forza* F *è parallela al piano* AD.

278. Dunque 4°. se il corpo C sia tra due piani inclinati ABD, DQX, l'uno o l'altro di essi farà le veci della forza F e ne avrà tutte le proprietà; cosicchè sostenendosi il corpo C dal piano DXQ per mezzo della normale Cp' (132), sarà Cp' la direzion della forza, l'angolo $F'Dp'$ sarà il complemento dell'angolo d'inclinazione F', e si avrà come sopra, $sen\, GDp' = \cos z$ ed $f = \frac{r\, sen\, n}{\cos z}$ (274); onde nel caso d'equilibrio si avvererà del piano DXQ tutto ciò che si è trovato della forza F. La teoria della stabilità delle Vel-

FIG. te, le quali comunemente si formano con l' unione di più piani inclinati, dipende da questi principj.

279. Dunque 5°. se sia $f=0$, il corpo sollecitato dalla sua gravità $\frac{ag}{\lambda}$ (132) non potrà riposar sul piano, e o sempre strisciando o prima rotolando e poi strisciando, necessariamente scenderà per AD. Scenderà sempre strisciando,
29. allorchè dentro alla base o effettiva o virtuale del corpo (132) si troverà la forza normale Cp che sostenuta e conseguentemente distrutta dal piano, lascierà il corpo all' impulso della sola forza CH che lo farà strisciar per la sua parallela AD. Ma se Cp cada fuor della base o effettiva o virtuale, il corpo sollecitato dalle due forze insieme, scenderà rotolando finchè una nuova situazione non faccia cader Cp entro ai limiti della sua base, dopo di che continuerà strisciando la sua discesa. Tutto ciò è evidente, e se una sfera, un poliedro regolare ec. che dovrebbero sempre strisciare, si aggiran sempre scendendo, è questo l' effetto talor dell' attrito e talora della reazione della percossa, cagioni straniere da cui quì prescindiamo.

280. Si concepisca ora che il piano ABD si rivolga intorno ad un cilindro EA la cui circonferenza eguagli esattamente la base BD; è chiaro che l' orlo AD formerà una *spira* la quale cangerà il cilindro in una *Vite*; di modo che se molti piani eguali ad ABD e ravvolti come il primo, si uniscano insieme lungo AE, la vite avrà tante spire quanti sono i piani riuniti, e la distanza tra spira e spira o il *pane della vite* sarà costantemente AB: perciò sarà vero di tutta la vite quanto lo è d' una sua spira AD e d' un suo pane AB.

281. Ora ciò che quì tende a scendere per la lunghezza del piano o per la spira AD non è più un corpo qualun-
30. que C, ma una *Madrevite* $R'=r'$ la quale o debba comprimere un corpo o innalzarlo, fa sempre figura d' una resistenza riguardo alla forza F, e di una forza riguardo alla resistenza R. Come resistenza ha il punto d' appoggio per

tutto l' asse pV del cilindro da cui è distante del raggio FIG. 30.
$pR'=c$, mentre la distanza della forza $F=f$ dallo stesso punto d' appoggio p è la leva $pF=h$; sarà dunque un argano, e per l' equilibrio si avrà (265) $f=\frac{cr'}{h}$. Come forza,
ha la direzione parallela alla base BD del piano inclinato, 29.
ciò esigendo la natura del cilindro che ella abbraccia ed intorno a cui tende ad aggirarsi: onde nel caso medesimo d' equilibrio si avrà (276) $r'=\frac{ar}{b}$. Sostituito questo valore nella prima equazione, viene $f=\frac{acr}{bh}$: ma $b=\mathrm{BD}$ che è la
circonferenza del cilindro pV, il cui raggio $pR'=c$ (280); 30.
dunque $b=2c\pi$ (L. 606), ed $f=\frac{acr}{2ch\pi}=\frac{ar}{2h\pi}$, cioè *nella vite la forza sta alla resistenza come il pane a della vite alla circonferenza $2h\pi$ descritta dal raggio o leva $Fp=h$.* Perciò si avrà l' equilibrio nella vite con una forza tanto più piccola, quanto ne sarà più corto il pane e più lunga la leva. E' manifesto che se fosse immobile la madrevite R' e tendesse a muoversi la vite pV, sarebbe necessaria la medesima forza, e l' equilibrio si esprimerebbe con la stessa equazione.

282. Dopo ciò nulla di più facile che il trovar l' equili-
brio nella *Vite infinita*, ove i denti della Ruota R'' fanno 31.
figura di madrevite; poichè chiamando h il raggio Fp della leva, c il raggio del cilindro a cui è unita, n il raggio $R''p'$ della ruota dentata, m il raggio $R'p'$ del rocchetto, f la forza in F; ed r'', r le resistenze in R'', R, si avrà come sopra (265) $r''=\frac{mr}{n}$; dunque $f\left(=\frac{ar''}{2h\pi}\right)(281)=\frac{amr}{2hn\pi}$, cioè *nella vite infinita la forza sta alla resistenza come il prodotto del pane a della vite nel raggio m del rocchetto, al prodotto del raggio n della ruota dentata nella circonferenza $2h\pi$ descritta dalla leva.*

FIG.

283. Supponghiamo infine che il piano inclinato ABD
32. si raddoppi e divenuto ADC, tenda con una forza BE normale ad AC a disgiungere i due cilindri M, N che in virtù dei pesi R', R'' starebbero strettamente uniti insieme: sarà dunque ADC un *Cuneo*, macchina volgarmente chiamata *Bietta* o *Zeppa*, ove in caso d' equilibrio la porzione $\frac{f}{x}$ della forza totale BE $= f$ è impiegata a distrugger la porzione R' $= \frac{r}{z}$ della total resistenza R' + R'' $= r$, e l' altra porzione $\frac{(x-1)f}{x}$ a distrugger l' altra porzione R'' $= \frac{(z-1)r}{z}$. Ora 1°. se la gravità o resistenza R' + R'' agisca nella direzione MN normale alla forza BE, posto il *semidorso* AB $=$ BC $= d$ e l' altezza BD $= a$, il piano ABD ci darà (276) $\frac{f}{x} = \frac{d \cdot \frac{r}{z}}{a} = \frac{dr}{az}$, e l' altro CBD darà del pari $\frac{(x-1)f}{x} = \frac{dr(z-1)}{az}$; onde sommando le due equazioni avremo $f = \frac{dr}{a}$ per l' effetto totale, cioè *la forza impressa normalmente sul dorso del cuneo isoscele sta alla resistenza che agisce per* MN *normale a* BD, *come il semidorso* d *all' altezza* a: 2°. ma se la gravità o resistenza R''' + R'''' agisca nelle direzioni MB, NB normali alle lunghezze o *lati* AD $= \lambda$, CD $= \lambda'$ del cuneo, sia egli isoscele o sia scaleno, allora i piani AD, CD normalmente premuti da MB, NB dovranno considerarsi come orizzontali (273) e in caso d' equilibrio converrà risolver BE $= f$ nelle due BM, BN opposte ed eguali alle due resistenze MB $=$ R'''' $= \frac{r}{z}$ ed NB $=$ R''' $= \frac{(z-1)r}{z}$ (273); onde compito il parallelogrammo BMEN, i triangoli EBM, EBN simili a CAD (L. 521) daranno $f : \frac{r}{z} :: 2d : \lambda$ ed $f : \frac{(z-1)r}{z} :: 2d : \lambda'$, e quindi ... $\frac{r + (z-1)r}{z} = \frac{f\lambda + f\lambda'}{2d}$ ovvero $f = \frac{2dr}{\lambda + \lambda'}$, cioè *la forza impressa normalmente sul dorso del cuneo sta alla somma delle resistenze che agiscono normalmente sui lati* AD, CD, *come il dorso* 2d *alla somma de lati* $\lambda + \lambda'$. Perciò il cu- 32.
neo sarà tanto più favorevole alla forza quanto $2d$ sarà più piccolo di $\lambda + \lambda'$ o quanto sarà più acuto l' angolo ADC.

FIG.

284. La proprietà del cuneo ritrovata nel primo caso si applica con successo alla compressione dei corpi, perchè allora la resistenza è parallela al dorso AC o normale alla forza BE: ma se la proprietà ritrovata nel secondo caso voglia applicarsi alle scuri, all' asci, alle pialle, agli scarpelli, alle vanghe, ai chiodi, agli aghi, ai rasoj, ai coltelli ec., e in generale a tutti quegli strumenti che servono a dividere i corpi o a discostarne le parti, rare volte si vedrà la pratica accordarsi con la teoria; ed attesa la natura e la disposizione estremamente varia delle fibre materiali, non accaderà forse mai che imprimendo una medesima forza ad un medesimo cuneo, si abbia in due diverse materie un medesimo risultato.

Attrito dei corpi e Rigidezza delle funi.

285. L' utilità dell' Attrito nell' arti meccaniche e negli usi ordinarj della vita è bilanciata anche troppo dai molti danni che egli cagiona a tutte le macchine in generale, e a quelle specialmente che sono il frutto d' un maggiore ingegno e d' una più studiata combinazione. Se per suo mezzo si conducono a pulimento i metalli, gli specchi, i diamanti; se le raspe, le lime, le seghe ricevono da lui tutta la loro azione; se gli animali medesimi gli son debitori della forza e della sicurezza con cui si appoggiano sul terreno movendosi: il consumo che egli fa dei varj pezzi d' una macchina, delle forze che vi si applicano e del moto da

esse prodotto, la differenza stupenda che per sua cagione si trova tra gli effetti delle macchine modellate in piccolo ove è quasi insensibile, e quelli delle macchine stesse eseguite in grande ove si aumenta oltre misura; gli sbagli enormi e dispendiosi a cui espone i Meccanici allorchè bastantemente non ne valutano l'influenza; tuttociò lo rende in pratica tanto più pericoloso, e nocivo, quanto è men facile di prevederne tutte le conseguenze e di soggettarlo ad un calcolo rigoroso.

286. I mezzi di diminuirlo sono assai noti: siccome egli nasce dalla resistenza che convien superare allorchè un corpo si vuol muover sopra di un altro (17), e questa è cagionata dall'adesione scambievole delle piccole punte e cavità dei due corpi, è certo che l'attrito sarà distrutto in gran parte e dal pulimento accurato delle superficie che ne scema le sinuosità e l'asprezze, e dall'interposizione di materie grasse ed untuose che riempiono i vuoti e pareggiano l'ineguaglianze, e soprattutto dalla combinazione di corpi eterogenei i cui pori e prominenze avendo tra loro assai meno di proporzione e d'affinità che le prominenze ed i pori dei corpi omogenei, debbono anche molto meno impegnarsi scambievolmente. Per altro ad onta di tali mezzi, resta sempre in qualunque macchina una porzione d'attrito che non è sperabile di calcolar mai con esattezza, poichè i gradi di temperatura e d'umidità dell'atmosfera, le fibre più o meno flessibili dei differenti corpi, la maggiore o minore attrazione delle molecule materiali, la pressione, la grandezza, la direzione e la celerità delle superficie che sfregano, son tutti elementi essenziali che dovrebbero entrare in calcolo, e che attesa la loro estrema variabilità ed incertezza non potranno entrarvi giammai. L'esperienza medesima non si accorda quì con se stessa, e sembra avvertirci tacitamente che in ciascun caso particolare, data una macchina e fissato con le regole stabilite di sopra il rapporto tra la forza e la resistenza, è necessario di conoscere con un esperimento immediato quanta forza per vincer l'attrito

 FIG.

si debba aggiungere a quella che la teoria prescriverebbe: le lunghe discussioni dei Matematici sull'attrito son piuttosto degli sforzi ingegnosi che delle verità d'un uso universale e sicuro.

287. Abbiansi dei piani AD e dei solidi C di varie ma- 29.
terie più e men levigate, e si ponga sopra un piano AD il solido C di cui vuol determinarsi l'attrito. Si sa che se questo attrito fosse zero, alzato appena il piano AD sull'orizzontale BD, e scostata anche minimamente la normale Cp dalla linea di direzione CM, il corpo C non potrebbe riposar sopra AD e necessariamente scenderebbe (279); dunque se egli riposi ad onta dell'innalzamento di AD, il suo riposo dovrà tutto attribuirsi all'attrito, che sarà perciò tanto più grande, quanto più potranno (salvo l'equilibrio o riposo di C) differir tra loro o il piano orizzontale BD e l'inclinato AD, o la normale Cp e la direzione CM, o l'angolo retto CpA e l'obliquo CGA che per questo appunto si chiama *angolo dell'attrito*. Quindi poichè alzando il piano AD finchè C sia sul punto di muoversi delle due forze Cp, CH in cui CG si risolve (132), la prima Cp che dicesi *forza di pressione* è distrutta dal piano, e l'altra CH lo è dall'attrito, se si chiami a l'attrito, s la pressione, r la resistenza o peso di C, n l'angolo ADB d'elevazione del piano, t l'angolo $BAD = CGp$ d'attrito, avremo $a : r :: CH : CG :: BA : AD :: \lambda \, sen \, n : \lambda$ (273) $:: sen \, n : 1$, cioè l'attrito starà al peso del corpo C come il seno dell'angolo d'elevazione al raggio. Avremo inoltre $a : s :: CH : HG :: 1 : tang \, t$ (L. 742), cioè *l'attrito alla pressione sta come il raggio alla tangente dell'angolo d'attrito*. Onde trovato, per esempio, l'angolo $BAD = CGp = t = 71°, 34'$ (quale si trova infatti in un gran numero di materie mediocremente levigate) si avrà $L \frac{s}{a} = L \, tang \, 71°, 34' = 0,4771621 = L3$ in circa, e però $a = \frac{s}{3}$ cioè l'attrito sarà $\frac{1}{3}$ della pressione: e se si trovi $BAD = 75°, 58'$ o $BAD = 78°, 41'$ ec. (come

FIG.

appunto si trova nelle materie sempre più ridotte a puli-
mento) verrà presso a poco $a = \frac{s}{4}$, $a = \frac{s}{5}$ ec. cioè l'at-
trito sarà $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ec. della pressione. Dal che si raccoglie
in generale che atteso l'attrito, un corpo C non sarà sul pun-
29. to di muoversi finchè la risultante CG delle forze Cp, CH non
faccia con la base IG di movimento un angolo CGp eguale
all'angolo d'attrito.

288. Ciò supposto, diamo un saggio della teorìa nell'ar-
gano e nel piano inclinato. Mi figuro per maggior sempli-
27. cità che nell'argano CE la forza F e la resistenza R agi-
scano presso a poco in un medesimo piano; ne prolungo le
direzioni RB, FD finchè convengano in L e da L conduco
Lp al centro p. Poichè dunque la risultante delle due for-
ze LR, LF, che in caso d'equilibrio passerebbe per il pun-
to p d'appoggio e vi sarebbe distrutta (109), supposto l'
attrito fa col pernio CE un angolo $C'IL = t$ (287), si co-
nosceranno nel triangolo pLI i lati $pI = a'$ raggio del per-
nio, $pL = q$ distanza del centro della ruota dal punto di
concorso delle due forze, e l'angolo $pIL = pIC' + C'IL =$
$90° + t$; onde fatto $pLI = \theta$, si avrà $sen\,\theta = \frac{a'\,sen.(90°+t)}{q}$
(L. 738) $= \frac{a'\,cos\,t}{q}$ (L. 704). Chiamando dunque m l'ango-
lo pLF, ed n l'angolo pLR, sarà $FLI = m - \theta$ ed $RLI = n + \theta$:
ma LI per ipotesi è la risultante delle due forze $LF = f$, $LR =$
r, e perciò $f : r :: sen\,RLI : sen\,FLI :: sen(n+\theta) : sen(m-\theta)$
(97); dunque $f = \frac{r\,sen(n+\theta)}{sen(m-\theta)}$, espressione della forza che
in caso d'attrito è necessaria nell'argano per l'equilibrio.

289. Dunque 1°. se l'attrito sia zero, avremo (287)
$0 : s :: 1 : tang\,t = \infty$ (L. 270) $= tang\,90°$ (L. 692); e però $t =$
$90°$, $cos\,t = 0$, $sen\,\theta = 0$ (288), $\theta = 0$, ed $f = \frac{r\,sen\,n}{sen\,m}$:
ma preso

FIG. 27.

ma preso pL per raggio $= R$, si ha $sen\,n = sen\,pLR = pB =$
a, e $sen\,m = sen\,pLF = pD = A$ (L. 686.); dunque $f =$
$\frac{ar}{A}$, come si è trovato di sopra (265).

290. Dunque 2°. se le direzioni LR, LF sieno paralle-
le, cioè se il raggio pL ($= q$) divenga infinito, sarà (L.
695.) $sen(n+\theta) = \frac{sen\,n\,cos\,\theta + sen\,\theta\,cos\,n}{\infty}$ e $sen(m-\theta)$
$= \frac{sen\,m\,cos\,\theta - sen\,\theta\,cos\,m}{\infty}$ (L. 703): ma in generale $cos = R$
$-$ sen. ver. (L. 712), onde quì $cos = \infty - sen\,v. = \infty$ (L.
269.); dunque $sen(n+\theta) = \frac{\infty\,sen\,n + \infty\,sen\,\theta}{\infty} = sen\,n +$
$sen\,\theta$, e $sen(m-\theta) = sen\,m - sen\,\theta$: ma si trovò (288)
$sen\,\theta = \frac{a'\,cos\,t}{q}$ e si ha $sen\,m = \frac{A}{q}$, $sen\,n = \frac{a}{q}$ (L. 745):
dunque $f = \frac{r(sen\,n + sen\,\theta)}{sen\,m - sen\,\theta} = \frac{r(a + a'\,cos\,t)}{A - a'\,cos\,t}$.

291. Dunque 3°. preso l'angolo $pLI' = pLI$, la risul-
tante in caso d'attrito potrà esser diretta per LI' senza tur-
bar l'equilibrio. Ora come dirigendosi per LI è più svan-
taggiosa alla forza che se mancasse l'attrito, perchè allora
si avrebbe $f = \frac{r\,sen\,n}{sen\,m}$ (289), laddove l'attrito ci dà $f =$
$\frac{r\,sen(n+\theta)}{sen(m-\theta)}$ (288) ed è chiaro che $\frac{n+\theta}{m-\theta} > \frac{n}{m}$: così di-
rigendosi per LI' favorisce la forza più che se l'attrito sia
tolto, perchè fatto il calcolo come sopra (288) si troverà f
$= \frac{r\,sen(n-\theta)}{sen(m+\theta)}$ ed è chiaro che $\frac{n}{m} > \frac{n-\theta}{m+\theta}$. Onde dall'
ipotesi dell'attrito nascono per la forza F due diversi valori
egualmente atti a mantener l'equilibrio, l'uno più grande
e l'altro più piccolo del valore che competerebbe ad F eli-
minato l'attrito; i quali valori, se LR sia parallela ad LF,
divengono $f = \frac{r(a + a'\,cos\,t)}{A - a'\,cos\,t}$, $f = \frac{r(a - a'\,cos\,t)}{A + a'\,cos\,t}$ (290),

FIG. il primo dei quali ha luogo quando il peso R è sul punto
27. di salire, il secondo quando è sul punto di scendere.

292. Dunque 4°. se nella stadera si faccia $pl = A$, pA
21. $= a$, $pu = a'$, avremo come nell'argano $f = \frac{r(a + a' \cos t)}{A - a' \cos t}$;
e se nella bilancia o nella puleggia fisssa si faccia $pA = pB$
20. e 22. $= A = a$, $pu = a'$, avremo del pari $f = \frac{r(a + a' \cos t)}{a - a' \cos t}$.

293 Similissimo è il calcalo dell' attrito nel piano inclinato: poichè dal punto C ove la forza e la resistenza con-
29. corrono, condotte CI, CI' che cadendo entro alla base GI del corpo C facciano l'angolo $CID = CI'F = t$, saranno esse due risultanti delle forze $CF = f$, $CM = r$ (287), cioè sarà CI la men vantaggiosa, e CI' la più favorevole alla forza F (291). Quanto a CI, si avrà come prima, $f : r ::$ $sen\, MCI : sen\, FCI :: sen\,(MCp + pCI) : sen\,(FCp - pCI) ::$ $sen\,(n + \theta) : sen\,(m - \theta)$, onde $f = \frac{r\, sen\,(n + \theta)}{sen\,(m - \theta)}$, espressione della forza F quando è sul punto di far salire strisciando il corpo C per DA. Quanto poi a CI', si avrà pur come prima, $f : r :: sen\, MCI' : sen\, FCI' :: sen\,(MCp - pCI')$: $sen\,(FCp + pCI') :: sen\,(n - \theta) : sen\,(m + \theta)$, onde $f = \frac{r\, sen\,(n - \theta)}{sen\,(m + \theta)}$, espressione della forza F quando è sul punto di lasciare scendere strisciando il corpo C per AD.

294. Differeziando la prima equazione $f = \frac{r\, sen(n + \theta)}{sen\,(m - \theta)}$, presa m variabile per aver, come sopra (277) la forza minima, troveremo $\frac{df}{dm} = \frac{-r\, sen\,(n + \theta)\cos\,(m - \theta)}{sen^2\,(m - \theta)} = 0$, e però $\cos\,(m - \theta) = 0$, minimo che dando $sen\,(m - \theta) = 1$ e perciò $m - \theta = 90°$ (L. 692), ci insegna che se C debba salir per DA, si avrà l'equilibrio con la più piccola forza quando l'angolo $FCI = m - \theta$ sia retto, cioè quando la direzion della forza F prolungata al di là di C verso D, faccia col piano AD un angolo eguale al complemento θ dell' an-

golo d'attrito; allora $f = r\, sen\,(n + \theta)$.

295. Differenziando del pari la seconda equazione $f = \frac{r\, sen\,(n - \theta)}{sen\,(m + \theta)}$, troveremo egualmente $\cos\,(m + \theta) = 0$, minimo che dando $sen\,(m + \theta) = 1$ ed $m + \theta = 90°$, ci insegna che se C debba scendere per AD, la più piccola forza bastante all' equilibrio non si ha più col farne la direzio- 29.
ne CF parallela ad AD, come trovammo allorchè si prescindeva dall' attrito (277), ma dirigendola per CF in modo che sia l'angolo $CFI' = \theta$; infatti essendo $FCI' = m + \theta = 90°$, si ha necessariamente $CFI' = \theta$ (L. 559); in tal caso $f = r\, sen\,(n - \theta)$.

296. Anche la *Rigidezza delle funi* ha dato luogo ad una piccola regola, che non è per altro più rigorosa e più sicura della teorìa dell' attrito, mentre molti degli elementi, da cui questa rigidezza è cagionata, come la qualità della canapa, lo stato dell' atmosfera, la celerità del movimento ec., sono anch' essi estremamente variabili e non è possibile di introdurgli nel calcolo e di valutargli con precisione. Ecco perciò quel poco che si è fissato su questo proposito dopo che gli Artefici troppo servilmente attaccati alla pratica antica, non hanno o potuta o saputa procurare alle funi una flessibilità sufficiente.

297. Sieno D, d i diametri di due funi della medesima specie, cioè egualmente nuove, egualmente torte ec.; sieno A, a i raggi delle ruote o cilindri che esse circondano, P, p i pesi che sostengono, e si voglian determinare le loro rigidezze R, r o le forze F, f che per vincer la rigidezza dovranno aggiungersi alla solita forza prescritta dalla teorìa. Poichè l' esperienza sembra quasi aver deciso che una fune è tanto più rigida o che vi vuole tanto più di forza a piegarla 1°. quanto è più grande il suo diametro, 2°. quanto è più piccolo il raggio della ruota o cilindro che ella abbraccia, 3°. quanto è maggiore il peso che ella sostiene; è evidente che le rigidezze R, r delle funi proposte e perciò le forze F, f occorrenti a piegarle, dovranno espri-

mersi con la ragion composta diretta dei diametri e dei pesi, ed inversa dei raggi delle ruote o cilindri (L. 311), cioè si avrà $R : r :: F : f :: D \times P \times \frac{1}{A} : d \times p \times \frac{1}{a} :: \frac{DP}{A} : \frac{dp}{a}$.

298. Ecco dei Problemi Meccanici nella cui soluzione potranno gli Studiosi ampiamente esercitarsi.

I. Supposto che due corpi con le celerità $C = 1$, $C' = 3$ si muovano uniformemente sopra due parallele tra lor distanti di $p = 24^{\text{piè.}}$, e sieno attualmente ad un intervallo $r = 74^{\text{pie.}}$, si cerca 1°. quando il loro intervallo sarà $m = 26^{\text{pie.}}$: 2°. quando si troveranno in dirittura: 3°. come possano sciogliersi questi due quesiti se le parallele divengano una sola linea retta: 4°. come si sciolga il Problema se i corpi in luogo di inseguirsi si vengano incontro. *Ris.* Chiamato T il tempo in secondi, si troverà 1°. $T = \ldots\ldots \frac{\sqrt{(r^2 - p^2)} \mp \sqrt{(m^2 - p^2)}}{C' - C} = \frac{30''}{40''}$; 2°. $T = \frac{\sqrt{(r^2 - p^2)}}{C' - C} = 35''$; 3°. $T = \frac{r \mp m}{C' - C} = \frac{24''}{50''}$; 4°. $T = \frac{r}{C' - C} = 37''$; 5°. se i corpi si incontrino, basterà mutar $\mp$ in $\pm$ e $-C$ in $+C$; tutti i valori numerici saranno perciò la metà dei già trovati.

II. Una circonferenza è divisa in parti eguali diversamente: 1°. in 5 parti con le cifre rosse 1, 2 ec.: 2°. in 7 parti con le cifre verdi 1, 2 ec.: 3°. in 9 parti con le cifre gialle 1, 2 ec.: 4°. in 315 parti con le cifre nere 1, 2 ec. Quattro mobili V, X, Y, Z si partono insieme dal punto o ove cominciano tutte le divisioni, e girando per lo stesso verso con moto uniforme e senza urtarsi, trascorrono in 1'' ciascuna delle respettive parti. Cerco ove sarà Z nel momento in cui V è in 3, X in 4, Y in 6, e quanti interi giri della circonferenza avrà fatti ciascun dei mobili. *Ris.*

Quando i mobili V, X, Y giungono la prima volta ai luoghi assegnati, Z non ha finito un giro ed è nella divisione 123: ma il primo mobile avrà fatti inoltre 24 giri, il secondo 17, e il terzo 13.

III. Dato che i mobili stessi V, X, Y, Z abbiano respettivamente le celerità $C = 1{,}2805$; $C' = 1{,}242$, $C'' = 1{,}11$, $C''' = 1$, determinare il tempo del primo generale incontro di tutti i mobili insieme, e del primo incontro particolare di essi a tre a tre e a due a due, come pure gli interi giri che dee far ciascuno prima d'incontrarsi la prima volta con gli altri. *Ris.* Il primo generale incontro dei quattro mobili ed anche il primo incontro particolare di essi a tre a tre avviene nei $181''\frac{9}{11}$ dopo 232 giri di V, 225 di X, 201 di Y e 181 di Z. Il primo incontro particolare di V con X avviene nei $25''\frac{75}{77}$ dopo 33 giri di V e 22 di X: di V con Y nei $5''\frac{295}{341}$ dopo 7 giri di V e 6 di Y; di V con Z nei $3''\frac{317}{561}$ dopo 4 giri di V e 3 di Z: di X con Y nei $7''\frac{19}{33}$ dopo 9 giri di X e 8 di Y: di X con Z nei $4''\frac{16}{121}$ dopo 5 giri di X e 4 di Z: di Y con Z nei $9''\frac{1}{11}$ dopo 10 giri di Y e 9 di Z.

IV. Tra l'istante in cui lasciai cadere un piccol globo di piombo in un pozzo, e l'istante in cui mi giunse all'orecchio il suono della percossa, contai un tempo $\tau = 8''$. Posto che il suono percorra uniformemente $173^{\text{tes.}}$ in 1'', sapreste voi determinar la profondità x del pozzo, e quando l'equazione fosse quadratica, distinguere il valore che scioglie il problema? *Ris.* Chiamando C la celerità del moto uniforme, e g la forza acceleratrice di gravità, si troverà $x = \frac{C}{g}[g\tau + C - \sqrt{(2Cg\tau + C^2)}] = 794^{\text{pie.}}$ incirca, poichè il solo valor negativo scioglie il problema.

V. Uno stesso globo trasportato in due diverse Latitudini ha prodotto un eguale sprofondamento in un mucchio di creta sopra cui è caduto. Come dedurreste voi di quì se in queste due Latitudini la forza acceleratrice di gravità sia eguale o ineguale? *Ris.* Se l'altezze da cui il globo è caduto si trovino eguali, lo saranno anche le forze acceleratrici di gravità; in altro caso, queste saranno reciprocamente proporzionali a quelle.

VI. Una bomba lanciata in alto verticalmente, è ricaduta in terra dopo 18″. A quale altezza si è sollevata? *Ris.* Ad un'altezza $x = 1223^{\text{pie.}}, 1$.

VII. Qual'è la celerità iniziale p con cui dovrebbe lanciarsi un corpo verticalmente all'insù, affinchè supposta la volgar legge dell'attrazione (4), trascorresse uno spazio infinito? E se il corpo si fosse lanciato con una infinita celerità, qual celerità χ gli resterebbe dopo aver trascorso uno spazio infinito? *Ris.* Preso il solito raggio medio della Terra (42) si ha 1°. $p = 34434^{\text{pie.}}$: 2°. $\chi = \infty$.

VIII. Qual'è la celerità finale c con cui un corpo liberamente cadendo, supposta la stessa legge d'attrazione, giungerebbe alla superficie terrestre dopo aver trascorso uno spazio infinito? *Ris.* $c = 34434^{\text{pie.}}$.

IX. Due pesi ineguali a, b uniti insieme con una funicella molto flessibile e leggiera pendono da una puleggia fissa. Cerco quale spazio s percorrerà in un tempo t il più grave a che discende. *Ris.* $s = \frac{gt^2 (a-b)}{2(a+b)}$.

X. Supposti eguali i tempi di due moti qualunque omogenei o eterogenei, trovar la proporzione delle celerità agli spazj. *Ris.* Si avranno dieci combinazioni di moti, e la proporzione si troverà in tutte geometrica.

XI. Trovare il centro di gravità d'un arco cicloidale

 FIG.

diviso in mezzo dal suo asse a. *Ris.* $\frac{\int xds}{s} = \frac{x}{3}$ contando dal vertice, e se si tratti dell'intera cicloide, $\frac{\int xds}{s} = \frac{a}{3}$.

XII. Dato un pendolo FM composto di due pesi, l'uno inferiore ed immobile $M = 6^{\text{onc.}}$, l'altro superiore e mobile $M' = 288^{\text{onc.}}$, trovar nella verga $FM = 4^{\text{pie.}}$ un luogo M′ tale che fissandovi il peso M′, l'oscillazioni del pendolo si facciano in 1″. *Ris.* Posto $M'F = x$, si troverà $x = 438^{\text{lin.}}, 52$ ovvero $x = 1^{\text{lin.}}, 86$ onde il problema ha due soluzioni. 7.

XIII. Un pendolo d'una lunghezza λ che essendo ben regolato dovrebbe fare in un certo tempo un numero n di vibrazioni, ne fa un numero $n \pm p$. Quanta sarà la lunghezza $\pm x$ che gli si dovrà aggiungere o togliere per regolarlo? *Ris.* $x = \frac{\lambda p}{n^2}(2n \pm p)$.

XIV. Un corpo gira in una data ellisse con una forza che tende al centro di essa. Cerco la legge con cui opera questa forza. *Ris.* La forza opera in ragion diretta delle distanze.

XV. Un corpo si rivolge per una parabola o per un'ellisse con una forza che tende al fuoco di esse. Cerco la legge con cui opera questa forza. *Ris.* La forza opera in ragione inversa dei quadrati delle distanze.

XVI. Due notizie vorrebbe un Bombardiere: 1°. quale sia la più facil maniera di determinar la forza della polvere: 2°. come possa prevenirsi l'intempestivo scoppiar d'una bomba, cosicchè determinata per esempio, la forza della polvere $a = 370^{\text{tes.}}$, trovati gli angoli $SBG = 6°, 12'$, $DBG = 32°, 50'$, e conosciuta la distanza, $BS = 564^{\text{tes.}}$, la bom- 13.

FIG. 13. ba scoppi nell' istante medesimo in cui giunge allo scopo S, Che risponderete? *Ris.* Al primo, che prenda l' ampiezza del tiro nell' orizzontale BG e faccia il tiro sotto un angolo semiretto; con ciò troverà la forza della polvere eguale alla metà dell' ampiezza del tiro. Al secondo, che calcoli il tempo in cui può giunger la bomba allo scopo S e ne regoli la miccia in conseguenza: nel nostro caso si trova il tempo $T = BS . \cos SBG \sqrt{\left(\frac{t^2 + 1}{2ag}\right)} = 10'',93$ e tanto dee durar la miccia.

7. XVII. Data o la celerità $C = 10^{\text{pie.}}$ di circolazione o l' arco ADM $= 60°$ d' oscillazione, determinar lo sforzo che il corpo umano fa contro la corda $FD = 5^{\text{pie.}}$ o contro il punto F di sospensione nel giuoco volgarmente detto *altalena*. *Ris.* Chiamato F' lo sforzo cercato, F la forza motrice di gravità, ed $FD = r$, si troverà $F' = \frac{2aF}{r}$, ove a è l'altezza dovuta o alla celerità C o alla celerità per l' arco ADM: data C, si avrà $F' = \frac{17F}{25}$, e dato ADM, verrà $F' = \frac{67F}{250}$ nel punto D.

XVII. Dall' ipotesi della giornaliera rivoluzion della Terra intorno al proprio asse potrà egli inferirsi che i corpi situati nell' Equatore fuggiranno dalla superficie del Globo e saranno lanciati per l' atmosfera? *Ris.* Presso il massimo raggio terrestre $r = 19686108$, si trova che i corpi non potranno mai staccarsi dal Globo se non abbiano un moto 18 volte in circa più grande di quello che hanno nell' ipotesi della rivoluzion diurna.

XIX. Situati a contatto in una stessa orizzontale un numero $n = 100$ di globi perfettamente elastici, la cui massa decresca in continua ragion geometrica, determinare e calcolar con esattezza la celerità c' che il primo

M =

$M = \frac{2}{3}$ urtando con la celerità $C = 1$ secondo $m = \frac{1}{3}$, trasmette all' ultimo per mezzo di tutti i frapposti globi in quiete. *Ris.* Si troverà $c' = C\left(\frac{2M}{M+m}\right)^{n-1} = \ldots\ldots\ldots$ 2338486807711.

XX. Supposto $a = 33^{\text{lib.}}$ il peso equivalente all' ordinaria forza d' un uomo (227) e dato un peso $b = 25^{\text{lib.}}$ che dee innalzarsi per mezzo d' una fune molto flessibile e d' una puleggia fissa di pochissimo attrito, si cerca il peso p che perde l' uomo contro il peso b, e qual peso p' gli resti per continuare il movimento. *Ris.* $p = \frac{2ab}{a+b} = 28 \frac{13}{29}$; $p' = \frac{a(a-b)}{a+b} = 4 \frac{16}{29}$.

XXI. Data la lunghezza $l = 5^{\text{pie.}}$ d' una leva, e la distanza $d = 3^{\text{pie.}} \frac{1}{2}$ del punto d' appoggio da una estremità B trovar la forza x che dall' altra estremità A può fare equilibrio ad un parallelepipedo omogeneo di un peso $r = 300^{\text{lib.}}$ situato in B sopra una porzione $u = 2^{\text{pie.}}$ della leva. *Ris.* $x = \frac{r(2d-u)}{2(l-d)} = 500^{\text{lib.}}$.

XXII. Una trave lunga $2a = 16^{\text{pie.}}$ e pesante $g = 3400^{\text{lib.}}$ dee posar nelle sue estremità sopra due mensole A, B e sostenere in distanza di $b = 4^{\text{pie.}}$ dal mezzo verso A un pilastro il cui peso $p = 2500^{\text{lib.}}$. Si cerca il peso P, Π di cui sarà caricata ciascuna mensola A, B, onde non si fabbrichi nè troppo massiccia con una spesa superflua nè trop-

FIG.

po debole con pericolo di rovina. *Ris.* $P = \frac{g+p}{2} + \frac{bp}{2a} = 2575^{lib.}$, $\Pi = \frac{g+p}{2} - \frac{bp}{2a} = 1325^{lib.}$.

XXIII. Supposto tutto come nel passato problema, qual sarà il carico delle due mensole A, B se la trave appoggiandosi ad un rialto della mensola A, debba posarvi obliquamente e far con l'orizzonte un angolo $\phi = 30°$? *Ris.* $P = g + p - \frac{(ag+ap-bp)\cos\phi}{2a} = 2753^{lib.}$, $\Pi = \ldots$ $\frac{(ag+ap-bp)\cos\phi}{2a} = 1147^{lib.}$.

XXIV. Supposta come prima la situazione obliqua della trave, in modo però che avendo ella una prominenza nella sua estremità verso B possa attenersi alla mensola B, determinare il carico delle due mensole A, B. *Ris.* $P = \frac{p+g}{2} + \frac{bp\cos\phi}{2a} = 2491^{lib.}$, $\Pi = \frac{p+g}{2} - \frac{bp\cos\phi}{2a} = \ldots$ $1409^{lib.}$.

20. XXV. Il peso d'una merce nel piatto F d'una bilancia falsa si trova r, e nel piatto R si trova r'. Qual è il vero peso x della merce? *Ris.* $x = \sqrt{rr'}$.

XXVI. Si sa che due corpi in equilibrio sopra una puleggia fissa ne aggravano il pernio con la somma dei loro pesi. Supposto dunque che l'un corpo pesi a e l'altro pesi b e che sia $a > b$ onde l'equilibrio non abbia più luogo, si cerca se il pernio sarà aggravato al solito da un peso $p = a + b$. *Ris.* Nò, perchè si troverà $p = \frac{4ab}{a+b}$ che è minore di $a+b$.

XXVII. In ciascuna delle due ruote d'un argano camminano 6 uomini (267); il raggio delle ruote è di $8^{pie.}$ e quello del cilindro (compreso il semidiametro della fune)

è di $6^{pol.}$. Cerco a qual resistenza o peso r faranno equilibrio i 12 uomini. *Ris.* $r = 20630^{lib.}$.

XXVIII. Per mezzo dell'antico principio dei Meccanici (232) determinar le condizioni dell'equilibrio nella burbera e nel cuneo isoscele. *Ris.* 1°. $f = \frac{ar}{A}$; 2°. $f = \frac{dr}{\lambda}$, come trovammo altrove.

XXIX. Data una verga cilindrica omogenea primieramente distesa in linea retta e poi ridotta a catena, cioè curvata in circolo o poligono regolare, determinar col principio medesimo (232) la ragion dei pesi che possono stirarla verticalmente quando è verga, o dilatarla circolarmente quando è catena: e supposto che un filo cilindrico di ferro del diametro di $0^{pol.}, 1032$ non si spezzi che da un peso di $600^{lib.}$ attaccatogli verticalmente, assegnare il peso o sforzo di dilatazione che può esser sostenuto dalla catena se ella sia di ferro ed abbia $1^{pol.}$ di diametro e $200^{pie.}$ di lunghezza. *Ris.* 1°. Posti m, m' i pesi o masse che spezzerebbero la verga e la catena, a il raggio della catena, π la sua circonferenza, si troverà $m' = \frac{m\pi}{a}$: 2°. posti b, c i raggi delle sezioni della verga e del filo di ferro, ed m'' il peso che spezza il filo, si avrà $m' = \frac{b^2 m''\pi}{ac^2} = 349040^{lib.}$ in circa.

XXX. Si ha un sistema di 4 ruote dentate e di 4 rocchetti in cui mentre la prima ruota fa un giro, l'ultimo rocchetto ne fa 3600. Vorrebbe cangiarsi in questo sistema una ruota qualunque dei denti N con un rocchetto qualunque delle ali n, onde l'ultimo rocchetto faccia 4000 giri mentre la prima ruota ne fa uno. Quanti denti x avrà la ruota e quante ali y il rocchetto? *Ris.* $\frac{x}{y} = \frac{16N}{9n}$.

XXXI. Per muovere un orologio vi vuole un peso M, ma l' angustia del luogo non lasciando scendere il peso per più d' uno spazio S, l' orologio cammina solamente per un tempo T. Qual peso x vi vorrà per farlo camminar per un tempo nT e con quali macchine potrebbe adattarsi all' orologio il nuovo peso? *Ris.* 1°. $x = n$M: 2°. le macchine son tutte quelle che rendono n^{pla} l' azion della forza.

XXXII. Supposto che l' attrito sia $\frac{1}{4}$ della pressione, che la ruota d' un argano abbia un raggio di $2^{\text{pie.}}$, il cilindro di $4^{\text{pol.}}$, 8, il pernio di $1^{\text{pol.}}$, 2 e che la forza e la resistenza agiscano parallelamente e in un medesimo piano, determinar la forza f che può fare equilibrio ad una resistenza di $2000^{\text{lib.}}$ o debba salire o debba scendere. *Ris.* $f = 429^{\text{lib.}}$, 4 per la salita; $f = 371^{\text{lib.}}$, 24 per la discesa.

XXXIII. Ad un terreno d' un' altezza $a = 30^{\text{pie.}}$ e d' una densità uniforme $\gamma = 2$ il quale senza ripari si inclinerebbe a scarpa con un angolo $\varphi = 50°$, vuole opporsi un muro verticale d' una densità uniforme $\Gamma = 3$. Quanta dovrà esser la sua grossezza x per l' equilibrio e quale sarà in questo caso il rapporto z dell' attrito alla pressione? *Ris.* 1°. $z = \frac{\cos\varphi\,[\sqrt{(9\gamma^2 \cos^2\varphi \cot^2\varphi + 48\,\Gamma\gamma)} - 3\gamma \cos\varphi \cot\varphi\,]}{8\Gamma} =$ 0, 38: 2°. $x = \frac{2az}{3} = 7\frac{3}{5}$ in circa.

Fine della Meccanica.

ELEMENTI

DI IDROMECCANICA.

299. L' Idromeccanica si divide in due parti: l' una è l' *Idrostatica* o *Scienza dell' equilibrio dei Fluidi*, la quale poichè tratta delle varie proprietà dei fluidi, allorchè sono stagnanti e tranquilli in un recipiente, può anche chiamarsi *Teorìa dei Fluidi in quiete*: l' altra è l' *Idrodinamica* o *Scienza delle Forze dei Fluidi*, la quale poichè considera i fluidi stessi allorchè rotto l' equilibrio son forzati a mettersi in movimento, può anche chiamarsi *Teorìa dei Fluidi in moto*.

300. Lontani dalle questioni importune della Fisica sistematica, non perderemo il nostro tempo ad investigar le ragioni della fluidità, che dall' epoca delle più antiche osservazioni fino a quella delle più recenti scoperte divennero sempre men facili a determinarsi. I solidi tutti che con una continuata ed insensibil traspirazione si risolvono in fluidi per comporsi nuovamente in solidi, e lo stesso durissimo diamante che nel fuoco d' uno specchio ustorio svapora appoco appoco e finalmente svanisce affatto dagli occhi; l' acqua che o si cangia in terra secondo il parere di Newton o si trasforma in aria secondo gli esperimenti di qualche Chimico; quel numero prodigioso d' *arie* diverse, cioè (supposta la comune opinione) di fluidi di vario genere che Priestley con altri ha sviluppate dai fluidi e dai solidi analizzati; per tralasciar la volgare operazione che ora col fuoco ed ora coi sali converte in fluidi i sassi, l' arene, i metalli, o reciprocamente riduce in solidi l' acqua, il vino e perfino il mercurio: tutto ciò forma sulla fluidità un cumulo di fenomeni a cui non crediamo sì facile di adattare un' ipotesi.

301. Bastano però questi fenomeni, quando pur mancasse ogn' altra prova, a farci comprendere quanto fossero limitate le cognizioni di certi antichi Filosofi che dal non sentirsi aggravati o dall' aria in cui vivevano, o dall' acqua in cui si immergevano talora, dedussero che i fluidi nella regione lor propria sono spogliati di peso. Se le molecule della materia unire in un solido incontrastabilmente son gravi, perderanno dunque la gravità nel disunirsi e nell'occupare il luogo che più conviene alla natura del fluido in cui si son disciolte? Perciò riguarderemo in avvenire come indubitata la gravitazione dei fluidi, e su questo principio ne stabiliremo la teoria.

PARTE PRIMA.

TEORÌA DE' FLUIDI IN QUIETE

Natura de' Fluidi in quiete.

302. Quel fluido le cui molecule da niuna intrinseca o estrinseca forza son costrette a cangiar di luogo, si chiama un *Fluido in quiete*: la fermentazione intestina, l'azione non impedita della gravità, il vento, il fuoco ec. turbano questa quiete e mettono il *Fluido in movimento*.

L' idea completa d'un fluido in quiete abbraccia più cose: la *natura del fluido* che riposa, la *condizione* che è necessaria al suo riposo, *lo stato delle molecule fluide* in questo caso, e le proprietà del *recipiente* che le contiene.

303. *Fluidi* o *Liquidi* si dicono quei corpi le cui molecule slegate ed indipendenti tra loro hanno una *perfetta mobilità* e cedono in conseguenza al più piccolo impulso. Se questa *perfetta mobilità* realmente non trovasi in alcun fluido, in quelli però di maggiore importanza è sì grande, che nei casi ordinarj può supporsi perfetta per render così

più semplice la teorìa. Quando poi le piccole forze di tenacità, d' attrazione, d' affinità ec. che ogni fluido a diversi gradi possiede, modificano i fenomeni in guisa che i risultati dell' ipotesi più non convengono con quelli dell' esperienza, allora si corregge l' una con l' altra, come a luogo a luogo vedremo.

304. Vi sono dei fluidi *incompressibili* ed *omogenei*, come l' acqua, il vino, il mercurio ec., che non potendo ridursi a maggiore o minor volume di quello che naturalmente hanno in ciascuno dei loro *strati*, conservano in tutti una densità uniforme: e ve ne sono degli *elastici* ed *eterogenei*, come l' aria, la fiamma, il vapor dell' acqua ec., che or crescono or diminuiscono di volume, ed hanno nei loro varj strati una variabile densità. I *fluidi imperfetti*, come la farina, la cenere, l' arena ec., non sono l' oggetto delle nostre ricerche.

305. Del resto i fluidi non meno che i solidi oltre il *peso assoluto*, o gravità generale che gli fa tendere ad un centro comune (301), hanno una *gravità* relativa o *specifica* che ne distingue e caratterizza la specie, ed è il vario lor peso allorchè hanno un egual volume. Quindi se Γ, γ esprimano i pesi o gravità specifiche di due corpi e V il lor volume comune, saranno $\frac{\Gamma}{V}$, $\frac{\gamma}{v}$ le lor densità D, d (9. 10): e poichè $\Gamma:\gamma::\frac{\gamma}{V}:\frac{\gamma}{V}$, si dee concludere che *le gravità specifiche dei corpi son proporzionali o si stimano dalle lor densità*. Posti pertanto $P = Mg$, $p = mg$ i pesi di due corpi qualunque (9) purchè composti di parti omogenee e simili, sarà $\Gamma:\gamma::D:d::\frac{M}{V}:\frac{m}{v}$ (10) $::\frac{Mg}{V}:\frac{mg}{v}::\frac{P}{V}:\frac{p}{v}$, e quindi $\Gamma = \frac{P}{V}$ ovvero $\gamma = \frac{p}{v}$ (11), cioè *la gravità specifica eguaglia il peso diviso per il volume*.

306. Dal peso o gravità generale (301) combinata con

FIG.

la perfetta mobilità (303) nasce la *condizione* necessaria all' equilibrio o riposo dei fluidi. Poichè ogni loro molecula sollecitata dal peso a discendere, cede alla sollecitazione in virtù della sua mobilità e realmente discende finchè può: ora è evidente che in un vaso pieno di fluido le molecule posson discendere finchè l' esterior superficie del fluido forma un piano in qualunque modo inclinato; dunque perchè il fluido contenuto in un vaso si ponga in equilibrio con se medesimo, è necessario che la sua esterior superficie divenga orizzontale e perciò anche normale in ogni suo punto alla direzione della gravità (273).

307. Questa orizzontal superficie del fluido chiamasi *livello* o *piano di livello*, e supposta la Terra prossimamente simile ad una sfera, non è già il livello un vero e geometrico piano, ma una porzione di sferica superficie il cui centro è il centro medesimo della Terra; giacchè in questa sola disposizione delle molecule fluide, la direzione della gravità è in ogni punto normale (L. 496) alla esterior superficie del fluido come bisogna (306).

33. 308. Con ciò si determina quale di due dati luoghi A, B sia più vicino al centro C della Terra, e si conosce in conseguenza se l' acqua stagnante in A possa col mezzo di tubi o di canali venire in B: poichè condotte per A, B e misurate con esattezza fino al livello DE le verticali AD, BE, si avrà la differenza $\pm$ AD $\mp$ BE che darà la cercata inclinazione o declività de' due luoghi. A ciò si riduce in somma l' essenziale operazione dell' *Arte di livellare* di cui si fa un uso sì grande nella Società o si tratti di derivazioni di fonti o di regolamenti di fiumi o di delineazioni di strade ec.: ma i varj metodi egualmente proprj alla livellazione, i diversi istrumenti più o meno comodi e più o meno accurati che possono adoperarvisi, gli sbagli considerabili che per la più piccola negligenza vi si posson commettere e le cautele che conviene osservare per evitargli, non appartengono a questo luogo, e basterà sciogliere una difficoltà che naturalmente deriva da quanto or ora abbiam detto.

FIG.

to. Imperocchè per qual via potrà mai determinarsi, per esempio, la distanza MN se il raggio visuale del Livellatore, attesa la direzione sempre rettilinea della luce, non va per il *livello vero* AM, ma per l' *apparente* AF tangente in A, e segna con palese inganno il punto F in luogo del punto M? Sia dunque la lunghezza non molto grande AF $= a$, il diametro GM $= b$, la differenza FM $= x$, ed avremo AF$^2 = a^2 =$ GF $\times$ FM $= (b + x)\, x$ (L. 569): ma $b + x = b$ (L. 269) perchè il diametro GM rispetto ad FM può riguardarsi come infinito; dunque $a^2 = bx$ ed $x = \frac{a^2}{b}$, cioè si misurerà coi soliti metodi la linea AF o AM o DN (poichè essendo AF non molto grande, queste tre linee non differiscono sensibilmente tra loro) e diviso il quadrato di essa per il diametro GM o KN della Terra, questo quoziente esprimerà di quanto debba diminuirsi la distanza trovata FN per aver la vera MN. Su questo principio può costruirsi una Tavola che secondo le diverse lunghezze dell' apparente livello AF, mostri le correzioni da farsi alle corrispondenti distanze FN: per altro se la livellazione si faccia a piccoli tratti o *battute* onde AF non sia mai più lunga di 20 o 30 tese per ciascuna *stazione*, la tangente AF si confonderà quasi con l' arco AM, la differenza FM potrà negligersi con sicurezza, e l' accennata regola con la Tavola che può formarsene, saranno inutili. 33.

309. Quanto allo *stato delle molecule fluide* in caso d' equilibrio, ben si vede che attesa la loro general gravità (301) le inferiori sostengono e son premute dalle superiori. Quindi se nel piccolo vaso HICD pieno d' acqua tranquilla, si consideri la molecula o goccia media FG dello 34. strato ultimo IC, la pressione s che ella soffre sarà espressa dal peso p del filo fluido GE che le sovrasta verticalmente nella direzione della gravità (306) e si avrà $s = p$: ma $p = \gamma v$ (305) e il volume v è qui un prisma o cilindro che ha per base la base b della goccia FG, per altezza la ver-

FIG. 34. ticale GE e per solidità il prodotto $b \times GE$ (L. 647); dunque $s = p = b \times GE \times \gamma$. Nè tal pressione può turbar l'equilibrio; poichè per imprimere un movimento alla goccia FG converrebbe o che cedesse il fondo del vaso, che si suppone abbastanza massiccio per resistere a questo sforzo, o che si movessero le goccie laterali, che sostenute di fianco dalle pareti del vaso e premute al di sopra come FG, ne elidono l'azione con una contraria ed egual reazione. Che se ora si aumenti il vaso a piacere onde divenga MN, e si scelga un'altra goccia qualunque PQ, è manifesto che lo strato d'acqua contiguo alle pareti ed al fondo farà figura di parete e di fondo riguardo allo strato seguente, questo la farà riguardo al suo vicino, e così sempre: dimodochè nel gran vaso MN la pressione della goccia PQ sarà come prima, $s = p = b \times QR \times \gamma$. Or se la pressione di questa goccia fosse o maggiore o minore per la direzione di QR che per altro verso, la sua perfetta mobilità la spingerebbe ove la pressione è minore, e il sistema della goccia più non sarebbe in riposo; dunque *qualsivoglia molecula d'un fluido in equilibrio è premuta egualmente per ogni verso, e la pressione equivale al peso d'un prisma dello stesso fluido che abbia per base la molecula stessa e per altezza la sua distanza dal piano di livello*.

310. Segue da ciò che l'essenziale del *recipiente* destinato a contenere un fluido in equilibrio è la proporzione delle sue pareti e del suo fondo con lo sforzo o pressione continua delle molecule fluide; onde non solo la materia del vaso e la sua capacità sono affatto indifferenti all'equilibrio, ma anche la sua figura. Poichè considerate nel vaso MNO, pieno d'un fluido stagnante, quelle sole mo-
35. lecule che formano lo strato arbitrario PQR, è certo che l'equilibrio risulta da una determinata resistenza che esse fanno alle loro contigue; dunque se queste molecule si concepiscan tolte dallo strato PQR e subito rimpiazzate da una materia qualunque dotata della medesima resistenza, tutto rimarrà necessariamente nello stato di prima; dunque

la figura capricciosa del vaso MNORQP non altera l'e- FIG.
quilibrio, *e comunque si faccia la comunicazione tra due* 35.
o più recipienti di varia figura e diametro, il fluido contenuto in essi avrà sempre lo stesso livello. Torneremo altrove a questo teorema e gli daremo allora l'universalità che gli conviene; ecco intanto perchè i canali ed i pozzi di qualunque diametro comunicanti tra loro o col fiume vicino, crescono e scemano concordemente d'una pari altezza: i soli tubi angustissimi o *capillari* per segrete ragioni o di viscosità o d'attrazione, fanno abbandonare ai fluidi questa legge, e mentre il mercurio non giunge in essi al piano di livello, l'acqua, l'olio, il vino ec. lo sormontano.

311. Tutto ciò è comune egualmente ai fluidi incompressibili ed agli elastici, mentre il peso e la perfetta mobilità d'onde risulta quanto si è fin quì stabilito, non hanno alcun vincolo necessario con l'elasticità, che perciò non può turbarne o modificarne gli effetti: ma l'equilibrio dei fluidi elastici ha delle proprietà particolari di cui mancano gli incompressibili. Infatti questa è, come altrove accennammo (205), la natura dei corpi perfettamente elastici, che la loro forza di restituzione, detta comunemente *elastica*, eguaglia esattamente quella di compressione: dal che subito s'inferisce che in un fluido tranquillo e compresso dal proprio suo peso, la forza elastica f d'una mo-
lecula qualunque FG è eguale alla pressione che ella soffre, e 34.
perciò $f = s = b \times GE \times \gamma$ (309). Quì però bisogna risovvenirsi che γ non è più una quantità costante, come nei fluidi incompressibili, ma varia in ciascuno strato del fluido elastico (304): perciò se la distanza d'una molecula E dall'ultima molecula G sia $EG = x$, la grossezza o altezza della molecula E sarà dx, e potendosi per tutto il tratto di questa infinitesima altezza suppor costante la gravità specifica γ, l'azione di questa molecula sulla molecula G sarà $b \times \gamma dx$ (309), e integrando, l'azione di tutte le molecule contenute nella verticale EG, ovvero la total pressione

FIG.

34. contro la molecula G, sarà $s = f = b\int \gamma dx$: ove è chiaro che per effettuar l'integrazione conviene esprimere in x la variabile γ; dunque *la pressione d' una molecula* G *nei fluidi elastici non solo si stima dal solito prisma* b × GE (309), *ma ancora dalla particolare specifica gravità di ciascuna molecula contenuta nella verticale* GE.

512. Tale appunto è il caso dell' aria, fluido ampiamente diffuso intorno a noi e della cui perfetta elasticità l' esperienza ormai bastantemente ha deciso. La stessa esperienza ci dice di più che una massa d' aria da forze sempre maggiori compressa, si riduce in volumi v, v', v'' ec. reciprocamente proporzionali ai pesi o forze comprimenti c, c', c'' ec., cosicchè si hanno l' analogìe $v : v' :: c' : c$, $v : v'' :: c'' : c$, $v' : v'' :: c'' : c'$ ec.: ora $d : d' :: \frac{m}{v} : \frac{m'}{v'}$ (10) e quì abbiamo $m = m'$ perchè la massa d' aria che si comprime è unica; dunque $d : d' :: v' : v :: c : c'$, cioè *le densità d' una massa d' aria diversamente compressa son proporzionali alle forze o pesi comprimenti, e perciò anche alle forze elastiche dell' aria nei diversi stati di compressione* (311).

313 Si osservi però che la stabilita proporzione tra le densità dell' aria e i pesi che la comprimono, probabilmente non ha luogo nei casi estremi; essendo inverisimile affatto che una quantità d' aria caricata d' un peso infinito si riduca in un volume infinitesimo, o che premuta da una forza infinitesima si spanda in un volume infinito. Il teorema pertanto si avvera nelle sole *densità medie*, giacchè queste sole possono sottoporsi all' esperienza, e di queste sole si ha bisogno negli ordinarj usi dell' aria. Si osservi ancora che questo fluido, atteso il caldo che lo dilata, il freddo che lo condensa, l' umidità che in certi casi ne aumenta e in cert' altri ne diminuisce la molla, e le molte e varie esalazioni che alterano la purità, è soggetto a dei cangiamenti i quali spesso ne turbano

FIG.

l' equlibrio e rendono poco esatti i risultati del calcolo.

Pressine dei fluidi in quiete contro i loro recipienti ed altri solidi.

314. Sia il recipiente MNO pieno d' un fluido tranquillo fino ad MO, e si voglia la pressione che soffre la minima particella o elemento V delle sue pareti. E' manifesto che l' elemento è premuto dalla base della molecula contigua m, onde tutto si riduce a determinar la pressione di m. Supponghiamo che m sia premuta da una forza AV; e se AV sia obliqua alla molecula m o alla parete NM del recipiente, potrà risolversi nelle due forze AB, AC, l' una parallela e l' altra normale a CV. Quanto alla forza AC = BV, ella è vinta dalla resistenza del vaso in cui direttamente s' incontra, e non produce alcun movimento nella molecula m; non così la forza AB = CV che non trovando resistenza, spingerebbe la molecula m verso M: ma per ipotesi il fluido è tranquillo, dunque la forza che preme m non può mai essere obliqua alla parete NM; le sarà dunque normale, e normale sarà perciò la pressione contro la parete medesima. 35.

315. Ciò che si dice della molecula m contigua al recipiente, dee intendersi di qualunque altra, facendo ciascuna, come sopra osservammo (309), la figura di parete riguardo a ciascun' altra: onde può stabilirsi che *ogni molecula d' un fluido in quiete è premuta da due forze eguali, opposte e normali*, senza di che il fluido sarebbe in moto. Se dunque usando il solito raziocinio (310), allo strato arbitrario PQR di molecule fluide si sostituisca una parete che faccia le loro veci, ogni elemento di questa parete sarà premuto dalle stesse due forze eguali, opposte e normali; dimodochè in generale *un recipiente soffre un' egual pressione o il fluido lo riempia o lo circondi*.

316. Ora poichè la misura della pressione contro la molecula ST si trovò $s = b \times TV \times \gamma$ (309), anche nel reci- 34.

34. piente qualunque MZNO un suo elemento infinitesimo L che eguaglia la base infinitamente piccola b della molecula (314), soffrirà una pressione $s = L \times LM \times \gamma$ equivalente al peso d' un prisma del medesimo fluido che abbia per base l' elemento L e per altezza la sua distanza dal piano di livello.

Se il fluido fosse elastico, la pressione sarebbe $s = L \times \int \gamma dx$ (311), e già si è detto che non può aversi l' integrale senza esprimer γ per x. Ora ciò facilmente si otterrebbe se potesse determinarsi la legge con cui dalla cima al fondo del recipiente vanno crescendo le densità o gravità specifiche negli strati del fluido: ma tali determinazioni per i fluidi elastici in generale fondandosi per lo più sopra ipotesi molto incerte, è questo uno dei tanti casi nei quali convien ricorrere ad un' esperienza immediata: perciò non intendiamo quì di parlarne.

317. Dunque 1°. *le pressioni* S, s *che i fluidi* MONZ, HDCI *esercitano contro tutti i punti delle circonferenze orizzontali* i cui diametri sono $ZN = 2b$, $IC = 2b'$, *eguagliano la somma di tutti i prismi infinitesimi che hanno* $ZM = a$ ed $IH = a'$ *per altezze e ciascun elemento di queste circonferenze per basi*, cioè *sono eguali al peso d' un prisma del medesimo fluido che abbia per basi le circonferenze* $2b\pi$, $2b'\pi$ (L. 606) *ed* a, a' *per altezze*; onde $S : s :: 2ab\gamma\pi : 2a'b'\gamma'\pi :: ab\gamma : a'b'\gamma'$. Perchè dunque i vasi cilindrici MONZ, HDCI sostengano lo sforzo dei fluidi, è necessario che le resistenze R, r di quelli eguaglino le pressioni S, s di questi e sia $R = ab\gamma$, $r = a'b'\gamma'$, ovvero $R : r :: ab\gamma : a'b'\gamma'$. Ora le resistenze R, r evidentemente risultano dalle grossezze g, g' dei vasi e dalle coesioni o tenacità t, t' delle materie onde son fatti; dunque avremo $gt : g't' :: ab\gamma : a'b'\gamma'$, e quindi *sarà* $g' = \frac{a'b'\gamma' gt}{ab\gamma t'}$ *la grossezza uniforme che dee darsi ad un tubo di nota tenacità* t' *affinchè con una data ampiezza o raggio* b' *regga ad un' altezza data* a'

un fluido di nota gravità specifica γ', *quando si sappia per esperienza la grossezza* g *e la tenacità* t *d' un altro tubo che ha sostenuto fino ad una determinata altezza* a *lo sforzo d' un fluido della data gravità specifica* γ. Così se si voglia la grossezza d' un tubo di piombo che con un raggio di *poll.* 3 regga l' acqua fino a *pie.* 100 d' altezza, mentre è noto che un altro tubo di piombo con una grossezza di *lin.* 6 e con un raggio di *poll.* 6 la resse all' altezza di *pie.* 60, sarà $\gamma = \gamma'$, $t = t'$, perchè ambedue i tubi son di piombo e debbon reggere uno stesso fluido, $a = 60$, $a' = 100$, $b = 6$, $b' = 3$, $g = 6^{\text{lin.}}$, e quindi $g' = \frac{100 \cdot 3 \cdot 6}{60 \cdot 6} = 5^{\text{lin.}}$. Del pari se un tubo di ferro del raggio di *poll.* 2. debba reggere del mercurio all' altezza di *pie.* 30, poichè l' esperienza ha insegnato che il ferro è 42 volte più tenace del piombo, avremo $\gamma = 1$, $\gamma' = 14$, $t = 1$, $t' = 42$, $a = 60$, $a' = 30$, $b = 6$, $b' = 2$, $g = 6^{\text{lin.}}$, e quindi $g' = \frac{30 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 6}{60 \cdot 6 \cdot 42} = \frac{1}{3}^{\text{lin.}}$.

318. Dunque 2°. *la pressione del fluido sul fondo orizzontale* ZN risulta dalla somma di tutti i prismi che hanno per base ciascun elemento del fondo e per altezza la stessa altezza del fluido, cioè *si misura dal peso d' un prisma del medesimo fluido che abbia per base il fondo stesso del vaso e per altezza la distanza del fondo dal piano di livello*; ond' è che il poco fluido contenuto nell' angustissimo vaso ZXHDKN esercita contro il fondo ZN la pressione medesima che vi esercita il molto fluido del gran vaso MN, verità maravigliosa a cui perciò si è dato il nome di *paradosso idrostatico*: ma si spiegherà facilmente se si osservi che fatta in X un' apertura al minor vaso, la pressione del fluido lo spingerebbe all' insù fino quasi al livello MO, come altrove dimostreremo; dunque il fluido trattenuto dall' azione o resistenza delle pareti XK, dee premere con eguale 34.

FIG. sforzo il fondo ZN, il quale perciò sostiene non solo il pe-
34. so, ma anche la reazione del fluido.

319. Dunque 3°. se sopra un fondo poligono si costruiscano tre vasi, il primo in figura di piramide ma più stretta in alto che in basso, il secondo in figura di prisma, il terzo in figura pur di piramide ma più stretta in basso che in alto, la pressione del fluido contro il fondo supererà nel primo, eguaglierà nel secondo, e sarà minore nel terzo del peso totale del fluido contenuto in ciascun vaso. Dal che si vede quanto differisca da quella dei solidi l'azione dei fluidi, mentre supposto che nel primo e terzo vaso il fluido improvvisamente si assodasse, la pressione contro il fondo eguaglierebbe sempre la totalità del peso. Se si trattasse però di sollevare o di trasportare un vaso pieno di fluido, sarebbe ridicolo il mettere in conto la pressione contro le pareti ed il fondo; poichè è evidente che per sollevare il vaso basta vincer lo sforzo della gravità la cui azione non dipende dalle pressioni ma dalle masse (9).

320. Dunque 4°. *la pressione del fluido contro una parete qualunque del recipiente* risulta dalla somma di tutti i prismi che hanno per base ciascun elemento della parete e per altezza la particolar distanza d'ognuno dalla superficie del fluido, cioè *si misura dal peso d'un prisma del medesimo fluido che abbia per base la parete data, e per altezza la distanza del centro di gravità di essa dal piano di livello* (128). Trovato dunque il centro di gravità della superficie d'un vaso qualunque (115. 118), si avrà subito la misura della varia pressione o interna del fluido che vi si contiene, o esterna del fluido che lo circonda (315). Così, per esempio, giacchè le superficie prismatiche hanno il centro di gravità nel mezzo della loro altezza (116), si troverà che la pressione contro i lati d'un vaso cubico orizzontalmente situato è doppia del peso dell'acqua, ec.

321. Ma la pressione del fluido contro le pareti curve d'un vaso o solido di rivoluzione può aversi in altro modo.

do. Si concepisca che la linea qualunque OEN giri intorno all'asse normale BM, e condotta l'ordinata normale DE $= y$, sia OM $= a$, NB $= b$, BM $= c$, MD $= x$, e l'elemento della superficie curva descritta dalla rotazione (L. 1127) $2\pi y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: ma tutti i punti o porzioni infinitesime di questo elemento sono ad egual distanza dalla superficie del fluido; dunque (320) la pressione contro di esso sarà $ds = 2\gamma\pi xy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, il cui integrale darà la pressione contro la porzione indefinita OED del vaso, e quindi fatto $x = c$ si avrà la pressione totale contro l'intero vaso. FIG. 36.

Applicazioni. I. Sia ON il lato obliquo d'un trapezio che aggirandosi produca la superficie d'un cono retto troncato. Condotte NK, EG parallele a BM, sarà 1°. ON $= \sqrt{(KN^2 + OK^2)} = \sqrt{[c^2 + (a-b)^2]} = m$; 2°. ON (m) : OE :: KN (c) : GE (x) :: OK $(a-b)$: OG $(a-y)$, onde OE $= \frac{mx}{c}$, d (OE) $=$ Ee $= \frac{mdx}{c} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (L. 1026) ed $y = a - \frac{(a-b)x}{c}$; dunque $ds = \frac{m\gamma\pi}{c}(2axdx - \ldots \frac{2(a-b)x^2dx}{c})$, ed integrando con osservare che quando $x = 0$, svanisce ogni pressione, si avrà $s = \frac{m\gamma\pi}{c}(ax^2 - \frac{2(a-b)x^3}{3c})$, ove fatto $x = c$, la total pressione contro la superficie del vaso conico sarà $s = m\gamma\pi(ac - \frac{2c(a-b)}{3}) = 2c\gamma m\pi(\frac{a}{6} + \frac{b}{3})$.

II. Sia ON un semiarco circolare del raggio r che aggirandosi produca la superficie d'un segmento sferico: sarà dunque $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{rdx}{y}$ (L. 1027) e $ds = 2\gamma r\pi xdx$, onde integrando, $s = \gamma r\pi x^2 = 2\gamma r\pi x \frac{x}{2}$: ma $2r\pi x$ eguaglia la superficie del segmento sferico (L. 640); dunque la

FIG. pressione totale contro di esso è eguale ad un prisma di fluido che ha per base la superficie del segmento e per altezza la metà della sua altezza.

36. 322. Si immerga ora tra due strati orizzontali VX, ZC d'un fluido VXZC e con qualunque inclinazione MBT il piano OMBN terminato dalla base orizzontale MO e da una linea retta o curva OEN. Condotte l'ordinate infinitamente vicine DE, de parallele a VX, comune sezione della superficie prolungata MONB e del piano di livello, ed alzata da D la normale DS sul piano stesso XAS, la pressione contro l'elemento De sarà espressa (318) dal prodotto e della gravità specifica γ del fluido, e della verticale DS, e del medesimo elemento De che per la sua piccolezza può riguardarsi come orizzontale: onde posto l'angolo d'inclinazione $\mathrm{MBT} = \mathrm{DAS} = i$, la lunghezza $\mathrm{BM} = l$, la base $\mathrm{BN} = b$, la distanza $\mathrm{MA} = c$, l'ascissa $\mathrm{MD} = x$, l'ordinata $\mathrm{DE} = y$, sarà l'elemento $\mathrm{D}d = dx$, l'elemento $\mathrm{D}e = ydx$ (L. 1115), l'ipotenusa $\mathrm{DA} = c + x$, la verticale $\mathrm{DS} = \mathrm{DA} \times \mathit{sen}\ \mathrm{DAS} = (c + x)\ \mathit{sen}\ i$ (L. 759) e il prisma esprimente la pressione elementare $ds = \gamma\,(c + x)\ ydx\ \mathit{sen}\ i = \gamma\,(cydx + yxdx)\ \mathit{sen}\ i$, il cui integrale preso come sopra (321), darà l'intera pressione contro il piano OMBN.

Applicazioni. I. Sia OMBN un rettangolo; sarà dunque $y = b$, onde $ds = \gamma\,(bcdx + bxdx)\ \mathit{sen}\ i$, ed integrando, $s = \gamma\,(bcx + \frac{bx^2}{2})\ \mathit{sen}\ i + \mathrm{C}$: ma quando $x = 0$ manca ogni pressione e però $\mathrm{C} = 0$; dunque fatto $x = l$, la pressione contro l'intero rettangolo sarà $s = \gamma\,(bcl + \frac{bl^2}{2})\ \mathit{sen}\ i$, la quale se il fluido rada il lato MO onde $c = 0$, diviene $s = \frac{b\gamma l^2\ \mathit{sen}\ i}{2}$.

II. Sia OMBN un semicircolo, il cui diametro $\mathrm{MB} = l$; sarà dunque $b = 0$, $y^2 = lx - x^2$ (L. 564), $2ydy = ldx - 2xdx$, $xdx = \frac{ldx}{2} - ydy$, e $ds = \gamma\,(cydx + \frac{lydx}{2} - y^2dy) \times$

 FIG.

$\mathit{sen}\ i$, ed integrando, $s = \gamma\,(c + \frac{l}{2})\ \mathit{sen}\ i \int ydx - \frac{y^3\ \mathit{sen}\ i}{3}$: ma $\int ydx$ esprime il semisegmento MDE (L. 1115) che preso $x = l$ e perciò $y = 0$, diviene il dato semicircolo $\frac{l^2\pi}{8}$ 36.
(L. 606); dunque la total pressione contro di esso sarà $s = \gamma\,(c + \frac{l}{2})\ \frac{l^2\pi\ \mathit{sen}\ i}{8}$.

323. Determiniamo infine il *centro di pressione* o quel punto della superficie premuta in cui si concepisce riunito tutto lo sforzo della pressione. Se questa pressione considerata come una forza sia s, il suo momento m, e la distanza del centro cercato dall'asse dei momenti sia z, si avrà $sz = m$ (105) e tutto si ridurrà a determinare s ed m. Pertanto sotto un angolo qualunque FPQ sia inclinata all'orizzonte la superficie piana OIHN situata come prima (322), e divisa in oltre dalla linea BM dell'ascisse in due simili ed eguali porzioni, con l'ordinate infinitamente vicine EL, el parallele alla solita XV (322). Condotte da D le normali DF ad XV, e DR al piano di livello XFR, sia $\mathrm{MD} = x$, $\mathrm{DL} = y$, $\mathrm{MA} = c$, l'angolo $\mathrm{ADL} = \mathrm{DAF} = \varphi$, l'angolo $\mathrm{FPQ} = \mathrm{PFR} = \theta$: dunque nel triangolo DFA rettangolo in F si avrà $\mathrm{DF} = (c + x)\ \mathit{sen}\ \varphi$ (L. 759), e nel triangolo DFR rettangolo in R sarà $\mathrm{DR} = (c + x)\ \mathit{sen}\ \varphi\ \mathit{sen}\ \theta$; sarà anche l'area infinitesima $\mathrm{L}e = 2ydx \times \mathit{sen}\ \varphi$ (L. 1115), la pressione infinitesima contro di essa $ds = \gamma \,.\, \mathrm{DR} \,.\, \mathrm{L}e = 2\gamma ydx\,(c + x)\ \mathit{sen}^2\ \varphi\ \mathit{sen}\ \theta$ (318), e il momento infinitesimo di questa pressione riferito all'asse XV dei momenti (105) sarà $dm = ds \times \mathrm{DF} = 2\gamma ydx\,(c + x)^2\ \mathit{sen}^3\ \varphi\ \mathit{sen}\ \theta$: onde il piano indefinito OELI soffrirà la pressione totale $s = \gamma\ \mathit{sen}^2\ \varphi \times \mathit{sen}\ \theta \int 2ydx\,(c + x)$, il cui total momento sarà $m = \gamma \times \mathit{sen}^3\ \varphi\ \mathit{sen}\ \theta \int 2ydx\,(c + x)^2$. Sostituiti pertanto questi va-

lori nell' equazione $sz = m$, si avrà $z\, sen^2\, \varphi\, sen\, \theta \int 2ydx \times$

$(c + x) = sen^3 \varphi\, sen\, \theta \int 2ydx\ (c + x)^2$, e però $z = \ldots$

$\dfrac{sen\, \varphi \int ydx\ (c + x)^2}{\int ydx\ (c + x)}$, distanza dell' asse XV dei momen-
36. ti dal cercato centro di pressione che per le condizioni supposte dee necessariamente trovarsi nella linea MB dell' ascisse: e si osservi che se fosse retto l' angolo delle coordinate onde $\varphi = 90°$, $sen\, \varphi = 1$, ed inoltre OI coincidesse con XV onde $AM = c = 0$, si avrebbe più semplicemente $z = \dfrac{\int yx^2 dx}{\int yxdx}$.

Applicazioni. I. Vogliasi il centro di pressione in un parallelogrammo che coincide col livello XV ed ha la semibase $BN = b$ e la lunghezza $BM = a$. Sarà dunque $y = b$, e verrà $z = \dfrac{sen\, \varphi \int x^2 dx}{\int xdx} = \dfrac{2x^3\, sen\, \varphi}{3x^2} = \dfrac{2x\, sen\, \varphi}{3}$: fatto $x = a$, avremo $z = \dfrac{2a\, sen\, \varphi}{3}$, cioè il centro cercato è ai due terzi di MB contando da M.

II. Vogliasi il centro di pressione in un triangolo che ha il vertice verso XV. Sarà dunque $DL = y = \dfrac{bx}{a}$, e però $z = \dfrac{sen\, \varphi \int xdx\ (c + x)^2}{\int xdx\ (c + x)} = \dfrac{(6c^2 + 8cx + 3x^2)\ sen\, \varphi}{2\,(3c + 2x)}$. Fatto $x = a$, viene $z = \dfrac{(6c^2 + 8ac + 3a^2)\, sen\, \varphi}{2\,(3c + 2a)}$.

III. Cerchisi il centro di pressione contro il fondo circolare d' una botte, situato verticalmente. Chiamo r il raggio del fondo, e c l' altezza del fluido al di sopra del raggio: sarà $sen\, \varphi = 1$, $y^2 = 2rx - x^2$, $xdx = rdx - ydy$, $\int ydx =$

ID, $\int xydx = r.\mathrm{ID} - \dfrac{y^3}{3}$, $\int x^2 ydx = (1070) - \dfrac{xy^3}{4} + \dfrac{sr}{4} \times$ 36.
$\int xydx$, e $z = \dfrac{c^2.\mathrm{ID} + 2cr.\mathrm{ID} - \dfrac{2cy^3}{3} - \dfrac{xy^3}{4} + \dfrac{sr}{4}\left(r.\mathrm{ID} - \dfrac{y^3}{3}\right)}{c.\mathrm{ID} + r.\mathrm{ID} - \dfrac{y^3}{3}}$.

Cangiato dunque ID nel semicircolo IB per aver la total pressione, e perciò fatto $y = 0$, verrà $z = \ldots\ \dfrac{\left(c^2 + 2cr + \dfrac{sr^2}{4}\right)\mathrm{IB}}{(c + r)\,\mathrm{IB}} = c + r + \dfrac{r^2}{4(c + r)}$, onde $\dfrac{r^2}{4(c + r)}$ indicherà quanto il centro di pressione è più basso del centro del fondo.

Proprietà dei corpi immersi nei fluidi in quiete.

324. Nel fluido MNO in quiete si concepisca un volu- 35.
me FE di esso che eguagli il volume d' un dato corpo qualunque DH; e giacchè FE si sostien tranquillo in mezzo al fluido, ben si vede che il suo peso è eguale alla pressione delle molecule che lo circondano, senza di che si produrrebbe tra esse un movimento, contro l' ipotesi. Se dunque il corpo o fluido o solido DH eguagli in peso FE come lo eguaglia in volume, e si ponga DH in luogo di FE, è manifesto che la primitiva pressione e l' equilibrio dovranno sussistere interamente. Ora supposto in G il centro di gravità del volume FE, l' azione del peso spinge FE a scendere per la verticale o linea di direzione GQ (273); dunque poichè FE non discende, bisogna concludere che la pressione del fluido *ambiente* MNO non solo è eguale ma anche opposta alla forza di gravità ed agisce contro FE per la linea stessa QG (273): ma questa pressione resta visibilmente la medesima finchè il volume di FE o di DH si conserva lo stesso, benchè DH scemi o cresca di peso; dunque *la spinta verticale GQ o QG d' un fluido contro un corpo qualunque DH che vi si immerga, eguaglia il peso del fluido*

FIG. 35. *scacciato* FE *e passa sempre per il centro* G *di gravità del volume* FE.

325. Sieno pertanto Γ, γ, P, p, V, v le gravità specifiche, i pesi ed i volumi del fluido FE e del corpo DH: si avrà $\Gamma : \gamma :: \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$ (305), onde poichè si è supposto (324) $V = v$, sarà $p = \frac{\gamma P}{\Gamma}$. Ora in caso d'equilibrio il peso di FE vien distrutto dalla eguale e contraria pressione s del fluido ambiente (324) onde $P = s$; dunque se in luogo di FE si ponga nel fluido il corpo DH, il nuovo suo peso diventerà $p - s = p - P = q$, cioè *un corpo qualunque immerso in un fluido vi perde una porzion del suo peso, la quale eguaglia il peso del fluido scacciato*. E da ciò si comprende per qual ragione un sasso, una secchia ec. si facciano salir con poca pena dal fondo dell'acqua alla superficie, e vi voglia poi uno sforzo più grande per continuare ad alzargli: nell'acqua il loro peso è $q = p - P$, fuor dell'acqua è p non facendo caso per ora dell'aria ambiente.

326. Le due equazioni $p = \frac{\gamma P}{\Gamma}$ e $q = p - P$ danno $q = \frac{\gamma P}{\Gamma} - P = \frac{P}{\Gamma}(\gamma - \Gamma)$: onde 1°. se sia $\gamma > \Gamma$, sarà $\frac{P}{\Gamma} \times (\gamma - \Gamma)$ e perciò anche q ovvero $p - s$ (325) una quantità positiva onde $p > s$, cioè *se la gravità specifica del corpo* DH *superi quella del fluido* MN, *il peso* P *di* DH *vincerà la pressione contraria*, e DH *col residuo* q *del suo peso calerà al fondo*; un pollice cubico d'ottone, per esempio, scenderà nell'acqua piovana con un peso $q = 4\frac{1}{2}$ *onc. franc.* incirca, giacchè $P = \frac{70^{lib.}}{1728}$, $\Gamma = 1$, $\gamma = 8$: 2°. se sia $\gamma = \Gamma$, sarà $q = 0$, e perciò $0 = p - P = p - s$ (325) ed $s = p$, cioè *se le gravità specifiche del corpo* DH *e del fluido* MN *sieno eguali*, *il peso* p *di* DH *sarà distrutto dalla contraria pressione del fluido*, *e* DH *resterà sospeso in-*

differentemente in qualunque parte di MNO; il legno del Brasile, per esempio, si fermerà pendente nell'acqua marina ovunque si collochi, giacchè l'uno e l'altra hanno la stessa specifica gravità: 3°. se sia $\gamma < \Gamma$, sarà $\frac{P}{\Gamma}(\gamma - \Gamma)$ e perciò anche q ovvero $p - s$ una quantità negativa onde $p < s$ cioè *se la gravità specifica di* DH *sia minor di quella del fluido* MN, *il peso* p *di* DH *sarà vinto dalla pressione contraria*, *ed il residuo* q *di essa lo spingerà alla superficie del fluido*; un pollice cubico di sughero per esempio, salirà nell'acqua piovana in virtù d'un peso negativo o d'una positiva pressione $q = \frac{1}{2}$ *onc. franc.* giacchè $P = \frac{70}{1728}$, $\Gamma = 1$, $\gamma = 0,24$. FIG. 35.

327. Quest'ultimo è il caso dei *galleggianti* cioè di quei corpi DH che immersi in un fluido MNO specificamente più grave, salgono alla superficie e dopo qualche oscillazione vi rimangon tranquilli. Se il galleggiante DH è un fluido, niuna sua parte resterà immersa nel fluido MNO, poichè non potendo DH per la minor gravità restare immerso interamente, a misura che si alzerà sul livello MO, sarà costretto (306) a mettersi in livello con se medesimo, e spargendosi orizzontalmente sopra MO, abbandonerà quella porzione di se che tuttora è sommersa; questa dunque sarà spinta fuori e si livellerà come la prima, finchè la superficie MO del fluido più grave diverrà la base del più leggiero: tanto appunto succede allorchè s'immerge dell'olio nell'acqua comune. Ma se il galleggiante DH è un solido, una parte di esso emergerà dal fluido MNO e una parte vi resterà sommersa; poichè non potendo il solido mettersi a livello con se medesimo, se tutto emergesse non graviterebbe punto sul fluido, cioè non avrebbe alcun peso, il che è assurdo. Supposto pertanto che il volume fluido IK eguagli in peso il solido DH, è visibile che DH potrà far le veci di IK in modo che tolto IK e sostituito DH, non si tur-

FIG. 35. berà l' equilibrio: ma in tal caso la parte immersa di DH sarà IK, e la rimanente IL sarà fuori del fluido; dunque *un galleggiante caccia di luogo un volume di fluido che eguaglia in peso il suo medesimo peso.*

328. Sieno, come prima Γ, γ le specifiche gravità del fluido e del galleggiante, V il volume del fluido scacciato, P il suo peso, p il peso del galleggiante LS, v il suo volume, e w il volume della parte immersa IK; onde occupando IK il luogo del fluido scacciato, sarà $V = w$. Avremo dunque al solito $\Gamma : \gamma :: \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$, e perchè $P = p$ (327) e $V = w$, sarà $\Gamma : \gamma :: v : w$ e quindi $w = \frac{\gamma v}{\Gamma}$, volume della parte immersa IK del galleggiante. Così se nel mercurio si immerga un cilindro di rame Giapponese la cui base sia b, l' altezza *poll.* 7, e perciò la solidità $7b$ (L. 647), sarà $\Gamma = 14$, $\gamma = 9$, $v = 7b$, e chiamata x l' altezza IS della parte immersa, avremo $w = bx = \frac{63b}{14}$, onde $x = \frac{9}{2} =$ *poll.* 4, 5: dunque l' altezza IX della parte emergente sarà $7 - x =$ *poll.* 2, 5.

329. Per altro l' equazione $w = \frac{\gamma v}{\Gamma}$ è vera solamente nel vuoto; poichè se tanto il fluido IK quanto il solido DH sieno nell' aria, i loro volumi V, v scacceranno due volumi V, v d' aria d' un peso p', p'', e i loro pesi P, p si ridurranno ai pesi $P - p'$, $p - p''$ (325). Supposta dunque γ' la gravità specifica dell' aria, sarà $P = \Gamma V$, $p' = \gamma' V$, $p = \gamma v$, $p'' = \gamma' v$, e $P - p' = V(\Gamma - \gamma')$, $p - p'' = v(\gamma - \gamma')$, cioè le specifiche gravità che riguardo ai pesi P, p erano Γ e γ nel vuoto, divengono $\Gamma - \gamma'$ e $\gamma - \gamma'$ riguardo ai pesi $P - p'$ e $p - p''$ nell' aria; dunque ponendo queste in luogo di quelle nell' equazione $w = \frac{\gamma v}{\Gamma}$, verrà $w = \frac{v(\gamma - \gamma')}{\Gamma - \gamma'}$, volume che ha nell' aria la parte immersa del galleg-

galleggiante. Si osservi però che quand' anche il fluido MNO fosse l' acqua piovana che pure è assai leggiera, si avrebbe $\Gamma = 1$ e $\gamma' = 0, 001$, cioè il peso dell' aria è sì piccolo in paragon del peso dell' acqua, che l' influenza di quella sull' immersione dei solidi potrà negligersi francamente, se pur non si voglia un' estrema esattezza. Infatti immerso, come sopra (328), il cilindro di rame nel mercurio e versata in esso dell' acqua finchè ricuopra il cilindro, è certo che il mercurio è premuto dall' acqua e dall' aria, e l' esperienza ci dà allora un' immersione di *poll.* 4, 3 del cilindro: vediamo pertanto ciò che dà la teorìa trascurando la considerazione dell' aria. Poichè il mercurio è caricato dall' acqua, prendo l' equazione $w = \frac{v(\gamma - \gamma')}{\Gamma - \gamma'}$, ove la gravità specifica dell' acqua è $\gamma' = 1$ e gli altri valori son come prima (328); dunque $w = bx = \frac{56b}{13}$ ed $x = \frac{56}{13} = 4\frac{4}{13} =$ 4, 308 incirca, cioè la teorìa differisce dall' esperienza meno di $\frac{8}{1000}$, il che nei casi ordinarj è realmente nulla.

330. Sembrerà forse più valutabile il peso che l' aria aggiunge all' oro, all' argento e a tutti gli altri corpi che si pesano in mezzo a lei, quando il contrappeso e il corpo che vuol posarsi non hanno una stessa gravità specifica. Per mezzo d' una bilancia si equilibri in aria con un peso di piombo un pezzo di sughero, e V, v, Γ, γ ne sieno i volumi e le specifiche gravità, supposti P, p i loro veri pesi; dunque chiamando γ' la gravità specifica dell' aria e ragionando come sopra (329), il piombo avrà nell' aria un peso $P - p'$ ed il sughero un peso $p - p''$; e poichè l' equilibrio dà $P - p' = p - p''$, sarà anche $V(\Gamma - \gamma') = v(\gamma - \gamma')$; onde se $\Gamma = \gamma$, verrà $(V - v)(\Gamma - \gamma') = 0$: ma non può esser $\Gamma - \gamma' = 0$; dunque (L. 190) $V = v$ e $P\ (= \Gamma V) = p\ (= \gamma v)$, cioè *quando due solidi equilibrati in aria hanno una stessa gravità specifica, i loro veri pesi sono eguali.* Ma se $\Gamma > \gamma$ come nel nostro caso del piombo e del sughe-

ro, sarà $\Gamma-\gamma' > \gamma-\gamma'$ e quindi $v > V$, $p''(=\gamma' v) > p'(=\gamma' V)$ e $p > P$, come si raccoglie dall'equazioni di sopra $V(\Gamma-\gamma') = v(\gamma-\gamma')$ e $P-p' = p-p''$; dunque *quando due solidi hanno ineguali le gravità specifiche, i veri lor pesi sono ineguali benchè nell'aria si mostrino in equilibrio*: infatti portata la bilancia nel vuoto, il sughero improvvisamente prepondera. Volendo allora il peso x da aggiungersi a P per restituir l'equilibrio, sarà $P+x=p$: ma abbiamo $p = P-p'+p''$, $v = \frac{p''}{\gamma'} = \frac{p}{\gamma}$ e perciò $p'' = \frac{\gamma' p}{\gamma}$; dunque $p = \frac{\gamma(P-p')}{\gamma-\gamma'}$: abbiamo ancora $V = \frac{p'}{\gamma'} = \frac{P}{\Gamma}$ onde $P\gamma' = p'\Gamma$ e $P\Gamma - P\gamma' = P\Gamma - p'\Gamma$; dunque $P = \frac{\Gamma(P-p')}{\Gamma-\gamma'}$. Sostituiti pertanto questi valori in $P+x=p$, verrà $x = p-P = \frac{\gamma(P-p')}{\gamma-\gamma'} - \frac{\Gamma(P-p')}{\Gamma-\gamma'} = \ldots\ldots$ $\frac{\gamma'(P-p')(\Gamma-\gamma)}{(\gamma-\gamma')(\Gamma-\gamma')} = \frac{\gamma'(P-p')(\Gamma-\gamma)}{\Gamma\gamma}$, essendo γ' assai piccolo in confronto di Γ e γ. Così se il sughero posto in equilibrio col piombo abbia un peso di 1000 grani, sarà $P-p' = 1000$, $\Gamma = 11,325$, $\gamma = 0,24$, $\gamma' = 0,001$ ed $x = \frac{0,001.1000.11,085}{11,325.0,24} = 4$ grani incirca. Del resto, come di due corpi equilibrati nell'aria il più leggiero prepondera nel vuoto, così prepondera il più grave in un fluido specificamente più pesante dell'aria; la ragione è la stessa e il peso da aggiungersi per ristabilir l'equilibrio è sempre $x = \frac{\gamma'(P-p')(\Gamma-\gamma)}{\Gamma\gamma}$. Se per esempio, si equilibri in aria con dell'ottone una ghinea il cui peso sia 129 grani, e si immerga quindi la bilancia nell'acqua piovana, le ghinea prepondererà e avremo $P-p' = 129$, $\Gamma = 18,888$, $\gamma = 8$, $\gamma' = 1$ ed $x = \frac{129.10,888}{18,888.8} = 9$ *gr.* in circa, peso da aggiungersi all'ottone per riaver l'equilibrio.

331. Nascono da queste dottrine diversi metodi per determinar le specifiche gravità dei solidi e dei fluidi. Quanto ai solidi, o essi si affondano nell'acqua piovana o vi galleggiano: se vanno a fondo, presa per termine di comparazione e fissata ad arbitrio la gravità specifica $\gamma = 1$ dell'acqua piovana, si esplori accuratamente nell'aria, la cui influenza per lo più non si valuta (329), il peso P del dato solido e ne sia V il volume, Γ la specifica gravità cercata, e perciò $P = \Gamma V$. Quindi sospesolo con un filo al braccio d'una bilancia, si immerga nell'acqua e per mezzo d'un contrappeso p si faccia l'equilibrio. E' chiaro che il solido scaccia un volume d'acqua eguale al suo volume, e si sa che se il peso del volume scacciato si chiami $p' = \gamma V$, resta al solido immerso il solo peso $q = P-p'$ (325) $= V(\Gamma-\gamma)$: ma atteso l'equilibrio si ha $P-p' = p$; dunque $p = V(\Gamma-\gamma)$, $\gamma = \frac{\Gamma V - p}{V}$, $\frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{\Gamma V - p}{\Gamma V} = \frac{P-p}{P}$, e poichè $\gamma = 1$ per ipotesi, si ha finalmente $\Gamma = \frac{P}{P-p}$. Così se un pezzo d'oro pesi nell'aria 3. *onc.* e sia sostenuto nell'acqua da *onc.* 2,8473, sarà $P = 3$, $p = 2,8473$ e $\Gamma = 19,64$ incirca.

332. Ma se il solido è un galleggiante d'un peso p' e d'una ignota gravità specifica γ', conviene unirlo ad un altro solido che si affondi e di cui si conosca il peso p e si abbia dal precedente metodo la gravità specifica γ. Quindi notato il peso P del solido composto, se ne trovi col metodo stesso la specifica gravità Γ, e poichè i volumi v, w dei solidi più grave e più leggiero formano il volume V del solido composto, sarà $v + w = V$ ovvero $\frac{p}{\gamma} + \frac{p'}{\gamma'} = \frac{P}{\Gamma}$, onde $\gamma' = \frac{\Gamma\gamma p'}{P\gamma - p\Gamma}$.

333. Quanto alla gravità specifica γ' d'un fluido qualunque, siccome immerso il solido nell'acqua piovana e fatto l'equilibrio col peso p, si trovò $\frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{P-p}{P}$ (331), così

FIG. immerso il solido stesso nel dato fluido e fatto l'equilibrio con un peso p', si avrà $\frac{\gamma'}{\Gamma} = \frac{P-p'}{P}$; dividendo pertanto questa equazione per quella, verrà $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{P-p'}{P-p}$, cioè poichè $\gamma = 1$ (331), la specifica gravità del dato fluido sarà $\gamma' = \frac{P-p'}{P-p}$. Anche l'equazione $x = \frac{\gamma'(P-p')(\Gamma-\gamma)}{\Gamma\gamma}$ (330) che suppone note le specifiche gravità dei solidi (331), potrebbe servire all'intento; poichè trovato con un'esatta esperienza il peso che per riaver l'equilibrio deve aggiungersi al più leggiero dei due solidi immersi nel dato fluido, si conoscerà $x = a$, e l'equazione diventerà $\gamma' = \ldots \frac{a\Gamma\gamma}{(P-p')(\Gamma-\gamma)}$, valore della cercata gravità specifica del fluido: anzi dall'altra equazione $x = \frac{\gamma'(P-p')(\Gamma-\gamma)}{(\gamma-\gamma')(\Gamma-\gamma')}$ (330) si avrebbe un valore più rigoroso.

334. Può ottenersi la gravità specifica dei fluidi anche
37. con l'*Idrometro*, macchina che consiste in un cilindretto MN esattamente diviso in piccole parti eguali 1, 2, 3 ec., a cui si attacca il corpo OP composto di due globi, l'uno O maggiore e di sughero, che serve ad aumentare il volume della macchina e a farla perciò galleggiare nel fluido anche il più leggiero, l'altro P minore e d'oro il quale procurerà alla macchina una situazion verticale e la costringerà ad affondarsi con tutto il corpo OP nel fluido anche il più grave. Sia $a^2\pi$ la base del cilindro MN, r il raggio del globo O, r' quello del globo P: sarà $\frac{4r^3\pi}{3}$ il volume o solidità di O, $\frac{4r'^3\pi}{3}$ il volume di P (L. 652) e $\frac{4\pi}{3}(r^3+r'^3)$ il volume del corpo OP. Ridotto questo volume ad un cilindro della base $a^2\pi$ e dell'altezza z, si avrà (L. 647) $a^2\pi z = \frac{4\pi}{3}(r^3+r'^3)$, cioè $z = \frac{4}{3a^2}(r^3+r'^3)$; onde se

$a = \frac{1}{3}$, $r = \frac{2}{3}$, $r' = \frac{1}{3}$, sarà $z = 4$. Ciò supposto, voglia sapersi per mezzo dell'idrometro la relazione tra le gravità specifiche Γ, Γ' di due fluidi, per esempio del mercurio e dell'acqua piovana: pongo la macchina primieramente nel mercurio e poi nell'acqua e ne osservo le parti immerse $w = \frac{\gamma v}{\Gamma}$, $w' = \frac{\gamma v}{\Gamma'}$ (328); dunque $w : w' :: \Gamma' : \Gamma$ e perciò $\frac{\Gamma'}{\Gamma} = \frac{w}{w'}$, cioè *le gravità specifiche di due fluidi sono in ragione inversa delle parti dell'idrometro che vi si immergono*. Se dunque egli si affondi nel mercurio fino alla divisione 1 e nell'acqua fino alla divisione 66, i volumi immersi saranno $w = a^2\pi(z+1)$, $w' = a^2\pi(z+66)$, onde $\frac{\Gamma'}{\Gamma} = \frac{z+1}{z+66} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$, e la gravità specifica del mercurio verrà $\Gamma = 14$, quella dell'acqua piovana $\Gamma' = 1$. Vi sono altri mezzi per costruire un idrometro: ma senza estenderci in altre descrizioni, basti avvertire che coi metodi fin quì spiegati si formò la Tavola delle densità o gravità specifiche che si è posta al fin dell'Opera e di cui abbiam parlato più volte.

335. Ed ecco i fondamenti con cui sciolse Archimede il famoso Problema della Corona. La storia è nota, e il problema si riduce a determinare in una mescolanza d'oro e d'argento la quantità dei due metalli. Sieno P, p, Γ, γ, V, v i pesi, le gravità specifiche ed i volumi dell'oro e della corona; si avrà dunque $p - P$ per la quantità dell'argento il cui volume e gravità specifica sieno v', γ'. Ora $V = \frac{P}{\Gamma}$, $v = \frac{p}{\gamma}$, $v' = \frac{p-P}{\gamma'}$ e $v = V + v'$ perchè si suppone che il volume della corona eguagli i due volumi dell'oro e dell'argento; dunque $\frac{p}{\gamma} = \frac{P}{\Gamma} + \frac{p-P}{\gamma'}$ e $P = \ldots \frac{\Gamma p(\gamma-\gamma')}{\gamma(\Gamma-\gamma')}$. Così se il peso della corona era $p = 5$ *lib.*,

FIG.

posto $r = 19$, $\gamma = 17$, $\gamma' = 11$, si sarebbe avuto il peso o quantità dell' oro $P = lib.\ 4\frac{13}{68}$, e quella dell' argento p — $P = 5 - 4\frac{13}{68} = \frac{55}{68}$. Questa soluzione però non è esatta, giacchè l' esperienza ha fatta conoscere insussistente in moltissimi casi l' equazione fondamentale $v = V + v'$: infatti un volume V d' oro e un altro v' d' argento non danno dopo la lor liquefazione e mescolanza un volume composto $v = V + v'$, ma alquanto maggiore; altri corpi mescolati ne danno uno minore, e dopo l' osservazioni di Priestley può dirsi che ben pochi sono i fluidi, l' *arie* specialmente, che dopo la mescolanza conservino la somma medesima dei volumi.

35. 336. Si è detto che la pressione del fluido contro il corpo immerso DH passa per il centro di gravità del volume FE (324), e di quì nasce tutta la teorìa dell' oscillazioni, situazioni e stabilità dei galleggianti, teorìa sì vantaggiosa nell' Architettura Navale: ma ella è per altra parte sì complicata nei casi anche i più semplici, che non crediamo di doverne parlare in questi Elementi. Rammentiamoci piuttosto che la pressione d' un fluido contro il solido immerso è sempre eguale in ciascun punto di ciascuno strato orizzontale del solido (317) giacchè nulla si cangia nella pressione o sia ella al di dentro del solido o sia al di fuori (315): pertanto se il solido abbia poca estensione, quantunque in rigor matematico i suoi strati inferiori sieno più premuti dei superiori attesa la colonna del fluido più lunga per quelli che per questi (317), fisicamente però la differenza è nulla e la pressione può dirsi per tutto la stessa. Dunque l' egualità di pressione per tutti i versi potrà ben condensare i solidi se son condensabili, ma non già mutarne l' esterna figura o l' interna disposizion delle parti, che in questa ipotesi debbono scambievolmente resistersi con egual forza e restar perciò nella prima loro situazione. Ora tale è il caso di un debolissimo uovo o d' un pezzo di cera

molle costretti ad affondarsi dentro il mercurio: tale è il caso degli uomini e degli animali altamente sommersi nell' aria o nell' acqua: l' eguaglianza della pressione non dà luogo al cangiamento delle parti, e poichè non vi è sensazione senza questo cangiamento o moto di parti, gli uomini e gli animali non possono ordinariamente accorgersi della pressione.

Macchine Idrostatiche.

Chiamansi *Idrostatiche* quelle Macchine i cui effetti hanno per fondamento le leggi dell' Idrostatica. Posson ridursi a sei: il *Barometro*, l' *Aerostata*, la *Tromba Pneumatica*, la *Tromba Aspirante*, la *Tromba Premente*, e la *Tromba Aspirante insieme e Premente*. Noi vi aggiungeremo la *Tromba a fuoco* e la *Vite Idraulica d' Archimede* per unir tutte insieme le Trombe o Macchine che servono all' innalzamento dell' acqua.

337. Il *Barometro* è una macchina con cui si misura il peso assoluto dell' aria. Sopra un gran vaso ove sia del mercurio e dell' acqua, penda verticalmente in modo da potersi alzare ed abbassare un tubo di vetro in varj pezzi ben collegati insieme con mastice, la cui lunghezza sia presso a sei tese, e serratane con una chiave o con altro equivalente riparo l' inferiore estremità, si empia di mercurio fino alla superiore che si chiuderà poi *ermeticamente* cioè con la fiamma da Smaltatori. Si cali allora il tubo nel vaso sottoposto, e quando la chiave sarà tutta immersa entro al mercurio, si giri per dar esito al fluido: chi pensasse di vederlo tutto discendere, s' ingannerebbe; il fluido scende per un gran tratto e poi si arresta ostinatamente all' altezza di *poll.* $27\frac{1}{2}$ incirca sopra il livello del mercurio stagnante. Crescerà lo stupore se la macchina si rialzi; appena sarà ella fuor del mercurio che precipiteranno al fondo i pollici $27\frac{1}{2}$, e in loro luogo salirà nel tubo tant' acqua da occupa-

re un' altezza di *poll.* 385 o *pie.* 32. incirca sopra il livello di quella che è contenuta nel vaso. A questa famosa esperienza del Torricelli è dovuto il barometro.

338. Sieno $A = 27\frac{1}{2}$, $a = 385$ l' altezze a cui si arresta nel tubo il mercurio e l' acqua, $\Gamma = 14$, $\gamma = 1$ le loro specifiche gravità, b l' apertura della chiave o la base comune sopra cui posano le colonne de' due fluidi sospesi; e poichè qualunque sia l' irregolarità del tubo in cui riposano, la loro pressione è sempre $s = b \times A \times \Gamma$, $s' = b \times a \times \gamma$ (318), avremo $s : s' :: b \times A \times \Gamma : b \times a \times \gamma :: A\Gamma : a\gamma :: 385 : 385$, e però $s = s'$, cioè la pressione del mercurio all' altezza di *poll.* $27\frac{1}{2}$ eguaglia la pressione dell' acqua all' altezza di *poll.* 385; dunque è una stessa la cagione che sostiene i due fluidi ad altezze sì differenti: ma il mercurio e l' acqua del vaso sono incapaci e di produr quest' effetto perchè le molecule fluide tendono di lor natura a livellarsi, e di produrlo eguale perchè la resistenza o densità è in loro inegualissima; dunque bisogna ammettere un agente esterno che gravitando costantemente sulla superficie dei fluidi stagnanti, gli metta in stato di bilanciar lo sforzo dei fluidi sospesi. Ora tale appunto è l' aria ambiente, riconosciuta perciò come vera cagione del fenomeno Torricelliano. Infatti se il tubo col vaso ove stagnano i fluidi si chiuda nel vuoto, manca appena la pressione dell' atmosfera che cessa affatto il fenomeno.

339. Si ha di quì la conferma di quanto altrove dicemmo (310) cioè che in due vasi comunicanti di qualunque figura, un fluido tranquillo si mette ad un livello medesimo. Imperocchè siccome supposta l' aria equilibrata con l' acqua in due tubi diversi, l' acqua nell' uno e nell' altro ha sempre l' altezza di 32 *pie.*, così riuniti i due tubi e supposto l' equilibrio, se l' acqua s' innalzi nell' uno a *pie.* 32, sarà necessariamente all' altezza medesima anche nell' altro: onde chiamando a quest' altezza ed m un multiplo o summultiplo

multiplo qualunque di essa, come per le due determinate altezze di 32. *pie.* l' esperienza ci dà l' evidente equazione $a = a$, così abbiamo subito l' altra non meno evidente $am = am$, la quale dimostra che il fluido tranquillo in due tubi comunicanti, ha in ambedue la stessa altezza qualunque ella siasi. Anzi può spingersi anche più oltre il raziocinio; poichè dall' essersi trovata la pressione di *poll.* $27\frac{1}{2}$ di mercurio eguale a quella di *pie.* 32 d' acqua, ovvero $s = s'$ (338), si deduce $b \times A \times \Gamma = b \times a \times \gamma$ ovvero $A\Gamma = a\gamma$ o anche $Am\Gamma = am\gamma$ e perciò $mA : ma :: \gamma : \Gamma$, cioè l' altezze qualunque dei due diversi fluidi tranquilli in due vasi comunicanti sono in ragione inversa delle loro specifiche gravità, e non solo *poll.* $27\frac{1}{2}$ di mercurio fanno equilibrio a *pie.* 32 d' acqua, ma anche *poll.* 55 a *pie.* 64 fatto $m = 2$, e *poll.* $13\frac{3}{4}$ a *pie.* 16 fatto $m = \frac{1}{2}$ ec. Dalla stessa equazione $A\Gamma = a\gamma$ si ottiene $A = \frac{a\gamma}{\Gamma}$, e posto $a = 32$, $\gamma = 1$, e $\Gamma = 0,913$ gravità specifica dell' olio d' uliva, sarà $A = \frac{32}{0,913} =$ *pie.* 35 incirca, altezza a cui si solleverebbe l' olio nel tubo per porsi in equilibrio con l' aria: onde anche nei tubi comunicanti a *pie.* 35 d' olio faranno equilibrio i *pie* 32 d' acqua o i *poll.* $27\frac{1}{2}$ di mercurio, e la legge stabilita per l' acqua e per il mercurio diverrà generale e potrà dirsi che *l' equilibrio di due fluidi nei vasi comunicanti dipende dalla ragion dell' altezze inversa a quella delle specifiche gravità*.

340. Può anche osservarsi a questo proposito che il mercurio e l' acqua si debbon sospendere nel tubo Torricelliano alle loro solite altezze o l' esperienza si faccia all' aperto o in una stanza; poichè quantunque in una stanza sovrasti al fluido stagnante una colonna d' aria assai piccola

relativamente a quella che gli sovrasta all' aperto, contuttociò l' aria interna comunicando con l' esterna, la stanza è insomma il veicolo di due vasi comunicanti, e i risultati che si ottengono per suo mezzo non debbon differire dagli immediati. Può aggiungersi che quand' anche la comunicazione tra le due arie fosse interrotta, l' interna però agisce con una forza elastica eguale alla pressione con cui agirebbe l' esterna (331), onde l' effetto delle due eguali cagioni dee necessariamente esser lo stesso. Perciò gli uomini e gli animali respirano egualmente bene e in casa e alla campagna, perciò il fuoco ha una pari attività e negli ordinarj cammini e in mezzo alle strade, perciò l' osservazioni barometriche di cui parleremo tra poco, si trovano eguali o si facciano allo scoperto o nell' angustie d' un gabinetto. E già s' intende che quì trattiamo dell' aria considerata solo come pesante, e prescindiamo dall' altre sue qualità di più o meno sana e depurata.

341. Determiniamo ora il peso totale dell' aria che circonda il Globo Terraqueo. Corrispondendo al peso d' ogni sottilissima colonna dell' atmosfera il peso d' una colonna di mercurio alta *poll.* 28 incirca ed eguale a quella in diametro (339), tutto il peso dell' atmosfera eguaglierà dunque il peso d' una zona sferica KGDAEB di mercurio che all'
33 altezza KG di *poll.* 28 cinga d' ogni intorno la superficie terrestre DEK: così la questione è ridotta a misurare in piedi cubici questa zona. Sia CK $= r =$ *pie.* 19631100 il raggio della Terra supposta prossimamente sferica, KG $= r' =$ *poll.* 28 $=$ *pie.* $\frac{7}{3}$ l' altezza del mercurio, e CG $= r + r'$ il raggio della sfera composta GAB: saranno dunque $\frac{4\pi}{3}(r+r')^3$ e $\frac{4\pi r^3}{3}$ le solidità delle due sfere GAB, KDN (L. 652), onde sottraendo l' una dall' altra, avremo la solidità della zona KGDAEB $= \frac{4\pi}{3}(3r^2 r' + 3rr'^2 + r'^3)$, la qua-

le trascurati i termini $3rr'^2 + r'^3$ come assai piccoli in confronto dell' altro, e preso $\pi = 3,1416$ (L. 605) diventa $4\pi r^2 r' = 11299960765136736$ *pie.* cubici: ma un piede cubico di mercurio pesa *lib.* 980 francesi, come si ha dalla Tavola delle gravità specifiche; dunque il peso totale dell' aria atmosferica sarà *lib. franc.* 11073961549834001280 incirca.

342. Del rimanente, il barometro descritto di sopra (337) non è già l' ordinario ed il più comodo: questo consiste in un tubo di cristallo che con un raggio per tutto eguale di due o tre linee, ha una lunghezza di soli 30 *poll.* Si chiude ermeticamente da un capo e dopo averlo nettato al di dentro, vi si versa dall' altro un terzo del mercurio destinato ad empirlo; si scalda allora e si agita onde esca dal fluido tutta l' aria che vi si annida, e quindi si aggiunge un altro terzo di mercurio ripetendo il caldo e l' agitazione; infine si empie affatto colle stesse cautele, e applicato un dito all' orifizio, si rovescia il tubo, e col dito che lo serra si immerge in un piccolo vaso o *bagno* dello stesso fluido. Allora rimosso il dito, si vede scendere in parte il mercurio contenuto nel tubo ed arrestarsi al solito verso i *poll.* $27\frac{1}{2}$, con che l' essenziale della macchina che poi si fissa in una tavoletta, è terminato. Ciò fatto, si prende una lastra d' ottone larga quasi quanto la tavoletta, e la sua lunghezza di tre pollici si divide dall' una parte in pollici notandovi d' alto in basso i numeri 29, 28, 27, 26 e distinguendovi le linee; dall' altra poi si divide in 32 parti eguali, e in faccia alla divisione 2ª. in alto si scrive *gran siccità*, alla 6ª. *siccità*, alla 10ª. *tempo stabile*, alla 14ª. *bello*, alla 17ª. che corrisponde a *poll.* $27\frac{1}{2}$, *vario*, alla 20ª. *pioggia o vento*, alla 24ª. *gran pioggia*, alla 28ª. *tempesta*, alla 32ª. *gran tempesta*. Quindi cominciando dalla superficie del mercurio che stagna nel vaso, si contano sulla tavoletta e lungo il tubo *poll.* 26 e a questo punto pre-

FIG. ciso si fa corrispondere la prima divisione in basso della lastra già preparata che quì dee fermarsi immobilmente. Ci dispenseremo dall' indagar le ragioni probabili di queste pratiche; le osservazioni costanti di un secolo e mezzo le hanno stabilite per tutti quei luoghi che poco si alzano sopra il livello del mare. Basti il sapere che con questo equipaggio il barometro accenna e spesso anche predice (prescindendo da qualche rara anomalìa) i cangiamenti dell' atmosfera, la quale non varia di peso che dentro i limiti angusti di quasi tre pollici di mercurio, facendolo talora in virtù d' una maggior gravità o anche d' una maggiore elasticità salire dall' altezza media di *poll.* $27 \frac{1}{2}$ fin presso a quella di *poll.* 29, e talora in virtù d' una gravità o elasticità minore obbligandolo a scendere fin presso ai 26.

343. La graduazione però che abbiamo assegnata al barometro, cessa di esser costante se dal luogo ove si son fatte le osservazioni si trasporti la macchina ad altri luoghi considerabilmente più alti o più bassi. La ragione è manifesta; poichè scemando nel primo caso e crescendo nel secondo la colonna d' aria che gravita sul mercurio, è forza che questo al minor peso si abbassi ed al maggiore s' innalzi. E' nato di quì l' ingegnoso pensiero di misurar col barometro l' altezza dei monti, purchè sieno date l' altez-
34. ze A, a del mercurio al piede G e alla cima E di essi, e si conosca la gravità specifica Γ dell' aria nella pianura ZGN. Infatti chiamando GE $= x$ l' altezza cercata, e dx l' altezza infinitesima dello strato o molecula aerea in E, sarà la total pressione dell' aria $s = b \times \int \gamma dx$ (311): ma questa pressione è bilanciata dalla colonna del barometro, il cui peso (338) è il prodotto della base comune b, dell' altezza nota a o della gravità specifica del mercurio che faremo 1 prendendola per termine di comparazione, come si prese sopra (331) quella dell' acqua; dunque poichè or ora

abbiam detto che a scema al crescer di x, sarà $b \times \int - \gamma dx = b \times a \times 1$ ovvero $\int - \gamma dx = a$. Ora le specifiche gravità dell' aria son proporzionali alle pressioni (312) o alle colonne barometriche (338); dunque $\Gamma : \gamma :: b \times A \times 1 : b \times a \times 1 :: A : a$, onde $a = \frac{A\gamma}{\Gamma} = \int - \gamma dx$. Differenziando pertanto quest' equazione ove γ è variabile (311), verrà $- \gamma dx = \frac{A d\gamma}{\Gamma}$, $\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{-\Gamma dx}{A}$, ed integrando (L. 1019), $L\gamma = - \frac{\Gamma x}{A} + Cost.$: ma in G a piè del monte si ha $x = 0$ e $\gamma = \Gamma$ onde $Cost. = L\Gamma$, dunque $L\gamma = - \frac{\Gamma x}{A} + L\Gamma$, ovvero $L \frac{\gamma}{\Gamma} = - \frac{\Gamma x}{A}$. Pertanto richiamando quì il numero e il cui logaritmo iperbolico $= 1$, potrà farsi (L. 1015) $L \frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{-\Gamma x L e}{A}$ o togliendo i logaritmi, $\frac{\gamma}{\Gamma} = e^{\frac{-\Gamma x}{A}}$, e perciò $\gamma = \Gamma e^{\frac{-\Gamma x}{A}}$, 34.
con che γ è data per x come bisognava (311) e si potrà quindi effettuar l' integrazione nella formula $\int - \gamma dx = a$, che diviene $a = - \Gamma \int e^{\frac{-\Gamma x}{A}} dx = A e^{\frac{-\Gamma x}{A}}$ (L. 1091), e presi i logaritmi avremo $La = LA - \frac{\Gamma x}{A}$, onde infine $x = \frac{A}{\Gamma} L \frac{A}{a}$, altezza richiesta. Se dunque si determini accuratamente con una immediata esperienza la specifica gravità Γ dell' aria nel livello ZGN, avendo riguardo per quanto è possibile alle varie modificazioni del caldo, del fred-

do, dei vapori ec., si calcolerà l'equazione $x = \frac{A}{\Gamma} L \frac{A}{a}$ per mezzo dei logaritmi, riducendola a $Lx = L\frac{A}{\Gamma} + LL\frac{A}{a}$ ed osservando che x è un logaritmo iperbolico e dee perciò moltiplicarsi per 0,43429 (L. 358) onde si cangi in ordinario: allora l'equazione da calcolarsi diventerà $Lx = LA - L\Gamma + LL\frac{A}{a} - L\,0{,}43429$. Sia per esempio la specifica gravità del mercurio 1, quella dell'aria $\Gamma = 0{,}00009196$, $A =$ *lin.* 337, $a =$ *lin.* 191: avremo

$$\begin{array}{rl}
LA = & 2{,}5276299 \\
La = & \underline{2{,}2810334} \\
\text{resto} = L\frac{A}{a} = & \underline{0{,}2465965} \\
LA = & 2{,}5276299 \\
L\,0{,}24\text{ ec.} = LL\frac{A}{a} = & \underline{9{,}3919870} \\
\text{somma} = & \underline{11{,}9196169} \\
L\Gamma = & 5{,}9635990 \\
L\,0{,}43\text{ ec.} = & \underline{9{,}6377843} \\
\text{somma} = & \underline{5{,}6013833}
\end{array}$$

diff. delle due somme $Lx = 6{,}3182336 = L.$*lin.*$2080816 = L$ *tes.* 2408, onde l'altezza cercata $x =$ *tes.* 2408.

344. Ora se con questo o con altro metodo sia già nota un'altezza b e si sieno osservate alla cima ed al fondo di essa l'altezze A', a' del barometro e la gravità specifica Γ' dell'aria, il calcolo per un'altra altezza ignota sarà più breve. Poichè avendosi in tal caso $b = \frac{A'}{\Gamma'} L \frac{A'}{a'}$ ed essendo per altra parte $A : \Gamma :: A' : \Gamma'$ come poco fa si è veduto (343), verrà $\frac{A}{\Gamma} = \frac{A'}{\Gamma'} = \frac{b}{LA'-La'}$, e quindi $x = \frac{b(LA-La)}{LA'-La'}$, ove i logaritmi son di lor natura ordinarj perchè il numero 0,434 ec. moltiplica x e b. Calcolata dunque una volta

la quantità costante $\frac{b}{LA'-La'}$ che quasi al livello del mare fu trovata di *tes.* 9764,94 $= m$, nelle particolari occorrenze non dovrà farsi il calcolo che di $x = mL\frac{A}{a}$ d'onde avremo x in tese. Per altro questi metodi di misurar l'altezze son soggetti a qualche eccezione e ne abbiamo altrove insinuati i motivi (313).

345 Per prevenire queste eccezioni si sono adoperate talora unitamente al barometro due altre macchine assai comuni, il *Termometro*, e l'*Igrometro*, l'una per misurare il caldo e la dilatazione dell'aria, l'altra per misurarne l'umidità; e col loro mezzo, osservato una volta al piede e alla cima dell'altezza b lo stato dell'atmosfera, si è procurato di aver presso a poco lo stato medesimo allorchè si è voluta misurare l'altezza ignota x. Ed è ben vero che qualche lume sullo stato attuale dell'atmosfera può ottenersi da queste macchine: ma sarebbe in errore chi contasse di ricavarne delle cognizioni sicure e precise. Il caldo ed il freddo che dilatano e condensano il mercurio del termometro, dilatano anche e condensano il tubo che lo contiene, e ciò turba necessariamente la natural salita e discesa del fluido: il peso medesimo di questo fluido cospira con la sua discesa e si oppone alla sua salita, onde il freddo dee comparirvi maggior del vero, e minore il caldo: infine perchè dagli eguali gradi del termometro sono indicate delle eguali dilatazioni o ristringimenti del mercurio, potrà egli inferirsi che sieno indicati dei gradi eguali di caldo e di freddo? bisognerebbe prima aver dimostrato che il caldo ed il freddo crescono nella medesima proporzione in cui il fluido si dilata e si condensa, mentre all'opposto è molto probabile che un caldo ed un freddo più grande trovino una difficoltà sempre maggiore a dilatare e a condensare un medesimo fluido.

L'Igrometro è ancor meno esatto: il migliore che si fa con una cordicella di canapa, conserva per un tempo notabile l' umidità che attrasse dall' atmosfera, e questa ha cangiato spesso il suo stato prima che la macchina possa darne alcun segno. I gradi dell' igrometro sono nel caso stesso di quelli del termometro, non essendo verisimile che l' umidità e la siccità sieno appunto proporzionali alla tensione e al rilasciamento della corda. Infine laddove si pretende di aver trovati nella congelazione e nell' ebullizione dell' acqua due termini fissi per graduare i termometri e rendergli paragonabili, non si è potuto fin quì scoprire alcun limite certo nell' umido e nel secco per procurare un simil vantaggio all' igrometro che è restato perciò una macchina inutile o di semplice curiosità.

Non parleremo dell' *Eudiometro* perchè non riguarda punto il nostro soggetto, e solo per cautela di chi si fidasse troppo d' un sì bel nome e delle lodi straordinarie che alcuni Chimici hanno date a questa macchina, avvertiremo che l' eudiometro, il quale secondo l' etimologìa dovrebbe misurar la bontà o salubrità dell' aria, ci ha fatto vedere che l' aria d' un palude è tanto buona quanto quella d' una collina, e forse anche migliore: ciò basta per concludere che vi è tra i moderni Chimici chi non cede in fanatismo agli antichi.

346. L' *Aerostata* o *Globo Aerostatico* volgarmente detto *Pallone Volante*, è una macchina con cui si crede di potere un giorno viaggiar per aria come si viaggia ora per acqua. Quelli che lo empirono d' aria infiammabile e sostennero esser questa la miglior maniera di costruirlo, non conobbero probabilmente nè la difficoltà di procacciarsi in copia quest' aria, nè il pericolo di veder la macchina subitamente accesa ed incenerita dall' elettricismo atmosferico. Si costruisce dunque ordinariamente col vapor della fiamma che formando insieme col suo inviluppo un volume assai più leggiero d' un egual volume d' aria comune, cede alla pressione del fluido ambiente e si solleva tramezzo ad esso finchè non giunga ad uno strato d' aria della sua stessa specifica

cifica gravità (326). Ora la formula $x = m\,\mathrm{L}\,\frac{A}{a}$ (344) si applica mirabilmente alla teorìa dei Globi aerostatici. Poichè essendo (343) $A : a :: \Gamma : \gamma :: \Gamma \times 70 : \gamma \times 70$, ed esprimendosi il peso d' un *pie.* cubico d' aria da $\Gamma \times 70^{\,lib.}$ nella pianura e da $\gamma \times 70^{\,lib.}$ nell' altezza x, fatto $70\,\Gamma = P$, $70\,\gamma = p$, si avrà $x = m\,\mathrm{L}\,\frac{P}{p}$. Si dica poi: se all' altezza x il peso p corrisponde ad un *pie.* cubico d' aria, il peso Π del globo a quanti *pie.* cubici V corrisponderà? cioè $p : 1 :: \Pi : V$, onde $p = \frac{\Pi}{V}$, e sostituito questo valore nell' equazione, verrà $x = m\,\mathrm{L}\,\frac{PV}{\Pi}$, ove $m = 9764{,}94$ (344), P è il peso in libbre francesi d' un *pie.* cubico d' aria alla pianura, Π è il peso assoluto del globo parimente in *lib.* francesi, V è il suo volume in *pie.* cubici, ed x l' altezza a cui dee sollevarsi espressa in *tese* (344). Date pertanto due qualunque delle tre quantità x, Π, V, si conoscerà subito l' altra, giacchè P si ha sempre dall' equazione $70\,\Gamma = P$: sicchè la formula contiene tutto ciò che può mai richiedersi intorno all' innalzamento dei Globi aerostatici, fuorchè le curiose ricerche della celerità con cui s' innalzano e del tempo che spendono ad innalzarsi, del che non intendiamo quì di parlare.

Vogliasi, per esempio, il volume d' un Globo che col peso di *lib.* 3500 debba sollevarsi all' altezza di *pie.* 10000. Osservata la gravità specifica dell' aria nella pianura, si trovi $\Gamma = 0{,}00106$; sarà dunque $70\,\Gamma = P = lib.\ 0{,}0742$, $\Pi = 3500$, $x = pie.\ 10000 = tes.\ 1666\frac{2}{3}$, e la formula diverrà $1666\frac{2}{3} = 9764{,}94\,(\mathrm{L}\,0{,}0742 + \mathrm{L}V - \mathrm{L}\,3500)$ onde $\mathrm{L}V = \frac{500000}{2929482} + \mathrm{L}\,3500 - \mathrm{L}\,0{,}0742$: ma $\frac{500000}{2929482} = 0{,}1706786$;

$L\,3500 = 3{,}5440680$ e $L\,0{,}0742 = 8{,}8704039$; dunque $LV = L\,69878$, e perciò $V =$ *pie. cub.* 69878. Se dunque il raggio del Globo sia r, si avrà il suo volume o solidità $V = \frac{4r^3\pi}{3} = 69878$, onde $r = \sqrt[3]{\frac{1048170000}{62832}} =$ *pie.* 26 incirca.

Ma finchè non si trovi il metodo di dare a queste macchine la direzione che più ci piaccia, o di mantenerle nel buon cammino a dispetto del frequente ostacolo delle correnti dell' aria, i Globi aerostatici non saranno che un divertimento puerile o una nuova sorgente di disgrazie e di morte per quei temerarj che avranno osato di avventurarvisi. Ora non è sì facile di ritrovar questo metodo: le navi comuni viaggiano tra due elementi, l'aria e l' acqua marina, le cui specifiche gravità sono come 1 a 1030, onde nei casi ordinarj la parte sommersa della nave trova nell' acqua un fortissimo punto d' appoggio che bene adoperato rende vana la violenza dell' aria e conserva alla nave la sua direzione; i Globi al contrario nuotano tra due arie la cui gravità specifica è sensibilmente la stessa, e quando pur si munissero d' una forza interna grandissima, ella probabilmente non eguaglierà mai in proporzione la forza che la natura ha data agli uccelli, i quali intanto o non si espongono agli impeti furiosi del vento o son costretti ad abbandonarvisi ciecamente.

347. La *Tromba Pneumatica* è una macchina per cui mezzo si toglie l' aria da un recipiente e vi si fa il vuoto; non che l' aria ne venga mai tolta interamente o che vi si faccia un vuoto perfetto, ma la densità del fluido vi è tanto diminuita che nell' ordinarie esperienze può riguadarsi per nulla. Ci dispenseremo dal descriver questa macchina a cui si son date più forme; ella è sì comune che poco vi vuole a vederla, e il vederla una volta vale assai più d' una lunghissima descrizione. Le sue parti essenziali sono la *campana* o *recipiente* che si vuota d' aria, il *piatto* sopra cui egli posa, la *tromba* che comunica col recipiente, l' *animella* o *embolo* che va su e giù per la tromba, e la *chiave* che permette all' aria del recipiente di passar nella tromba, ma le vieta di ripassar dalla tromba nel recipiente. Il primo movimento o *colpo* dell' embolo fa nascer nella tromba uno spazio senz' aria in cui si estende subito l' aria del recipiente ed in tal guisa quest' aria già comincia a rarefarsi: cresce la rarefazione a misura che crescono i colpi dell' embolo e giunge infine a tal segno che differisce appena dal vero vuoto.

L' unico problema che in proposito di questa macchina sì fertile di fisiche cognizioni, interessi il nostro soggetto è il determinar la proporzione tra le densità o gravità specifiche Γ dell' aria esterna e $\gamma = 1$ dell' aria del recipiente dopo un numero n di colpi dell' embolo: e a questo pure soddisfà la solita formula $x = m\,L\frac{A}{a} = \frac{b(LA - La)}{LA' - La'}$ (344) che solo ha bisogno di essere adattata al nostro caso. Si immagini pertanto un barometro chiuso nel recipiente, e si supponga che il mercurio situato all'altezza $A' = A$ prima di muover l' embolo, scenda all' altezza a' dopo 1 colpo di esso e all' altezza a dopo n colpi; dunque le due discese del mercurio sono egualmente prodotte e dai colpi 1 ed n dell' embolo, e dall' altezze b ed x a cui si trasporta il barometro (343); dunque poichè le cagioni che producono lo stesso effetto sono eguali, si avrà $1 : b :: n : x$, onde $\frac{x}{b} = n$. Ora avendosi $A : a :: \Gamma : \gamma$ (343) ed $A' : a' :: \Gamma' : \gamma' :: v' : V'$ (305) giacchè la massa M d' aria chiusa da principio nel recipiente è la stessa che la massa m divisa tra il recipiente e la tromba dopo il primo colpo dell' embolo, sarà $\frac{A}{a} = \frac{\Gamma}{\gamma} = \frac{\Gamma}{1} = \Gamma$, ed $\frac{A'}{a'} = \frac{v'}{V'}$: ma i volumi V', v' che occupa l' aria del recipiente quando il mercurio è in A', a' cioè quando l' embolo o non si è mai mosso o si è mosso la prima volta, son determinati l' uno dalla capacità R del recipien-

FIG. te, l'altro dalla somma S delle capacità del recipiente e della tromba; dunque $\frac{A'}{a'} = \frac{v'}{V'} = \frac{S}{R}$. Sostituiti perciò questi valori nella formula $x = \frac{b(LA - La)}{LA' - La'}$ che si riduce ad $\frac{x}{b} L \frac{A'}{a'} = L \frac{A}{a}$, avremo $n L \frac{S}{R} = L\Gamma$, equazione che scioglie il problema. Così supposta 5 la capacità del recipiente, 2 quella della tromba, e 10 i colpi dell' embolo, sarà $R = 5$, $S = 7$, $n = 10$ e $L\Gamma = 10 L \frac{7}{5} = 1{,}4612800 = L\,29$ incirca, onde $\Gamma = 29$, cioè l' aria esterna sarà 29 volte più densa di quella del recipiente. E' manifesto che l' equazione contenendo le quantità Γ, n, R, S, se tre qualunque di esse sieno note, si troverà subito l'altra.

38. 348. La *Tromba Aspirante* è composta 1°. di due tubi di metallo uniti insieme, l'uno AN ordinariamente più ampio dell' altro NT che con la sua inferiore estremità è immerso sotto il livello XY dell' acqua: 2°. d' una valvula O che può aprirsi solamente all' insù e che si fissa o nel piano MN ove i due tubi si uniscono, o anche nel livello TV: 3°. di un embolo CGHI guarnito di una simil valvula, il quale combaciando esattamente col tubo AN impedisce ogni accesso all' aria esterna, e facendosi alternativamente salire e scendere per mezzo d' una leva DC, percorre un certo spazio fisso HL tale che LN sia minore di NV. Segue da tal meccanismo che se una forza applicata in D alzi l' embolo fino in KL, l' aria atmosferica contenuta in MI occuperà tutto lo spazio ML, onde subito sbilanciandosi l' aria più densa racchiusa in TN, entrerà per la valvula O, e tutta l' aria TI sparsa uniformemente per TL diverrà più rara dell' aria esterna, che con l' eccesso della sua pressione obbligherà l' acqua XY a sollevarsi nel tubo ad un' altezza RS corrispondente a questo eccesso: allora se si abbassi l' embolo, l' aria tornando a comprimersi, forzerà le valvule O, G l' una a chiudersi, l' altra ad aprirsi, e per questa uscirà; perciò

se l' embolo nuovamente s' innalzi, l' acqua per la stessa ragione salirà più alto nel tubo, e dopo un certo numero di simili movimenti, toccherà l' embolo, passerà per la valvula G, e giungerà finalmente a versarsi per lo sfogo F. 38.

349. Ora per determinar l' altezza dell' acqua a ciascun colpo dell' embolo, sia $TM = a$ la lunghezza del tubo inferiore TN il cui diametro $TV = 2r'$; sia $HK = a'$ l' altezza fissa per cui scorre l' embolo nel tubo superiore MB il cui diametro $MN = 2r$; e sia $MH = d$ la minima distanza dell' embolo dalla base MN: se si chiamino $TR = x$, $RP = y$ l' altezze dell' acqua dopo i primi due colpi dell' embolo, sarà $RM = a - x$, $PM = a - x - y$, $MK = a' + d$, e le solidità o volumi dei cilindri $MI = \pi d r^2$, $ML = \pi r^2 (a' + d)$, $RN = \pi r'^2 (a - x)$, $PN = \pi r'^2 (a - x - y)$ (L. 647). Fatte pertanto Γ, Γ' le gravità specifiche dell' acqua e dell' aria, b la base TV della tromba, e $q = 32$ l' altezza della colonna d' acqua che fa equilibrio alla corrispondente colonna d' aria atmosferica della tromba (337) onde si abbia $s = b\Gamma q$ per la forza o pressione di questa (309), considero gli effetti del solo secondo colpo dell' embolo quando l' acqua è già in RS, ed osservo 1°. che l' aria della tromba dopo il primo colpo dell' embolo non è più atmosferica e che la gravità specifica Γ' è divenuta Γ'' giacchè per ristabilir l' equilibrio l' acqua è salita in RS ed alla forza s' dell' aria interna si è dovuta aggiungere tutta la forza $b\Gamma x$ del cilindro aqueo TS; dal che si ha $s' + b\Gamma x = b\Gamma q$ ed $s' = b\Gamma (q - x)$: 2°. che condotto l' embolo da HI in kl ove suppongo che l' aria atmosferica MI divenga omogenea con la già rarefatta RN, se l' embolo si alzi quindi in KL, l' acqua giungerà in PQ; onde quella massa d' aria $p' = P'$ che avea un volume $v' = MI$, ne ha ora uno $V' = Ml$, e quella massa $p = P$ che avea un volume $v = RN + Ml$, ne ha ora uno $V = PN + ML$: 3°. che la forza s'' dell' aria interna dopo il secondo colpo dell' embolo è divenuta ancor più debole e che la gravità specifica Γ'' è divenuta Γ''' poichè per aver l' equilibrio se le è dovuta unire la forza $b\Gamma x + b\Gamma y$ del ci-

FIG. 38. lindro aqueo TQ; dal che abbiamo $s'' + b\Gamma x + b\Gamma y = b\Gamma q$ ed $s'' = b\Gamma\,(q - x - y)$. Ciò supposto, essendo le forze elastiche dell'aria proporzionali alle sue gravità specifiche (312), si avrà $b\Gamma q : b\Gamma\,(q - x) :: \Gamma' : \Gamma'' :: \frac{p'}{v'} : \frac{P'}{V'} ::$ $V' : v' :: Ml : MI$, onde $Ml = \frac{\pi d q r^2}{q-x}$: e parimente $b\Gamma\,(q-x)$: $b\Gamma(q - x - y) :: \Gamma'' : \Gamma''' :: \frac{p}{v} : \frac{P}{V} :: V : v ::$ PN + ML: RN + Ml, ovvero sostituendo i valori fatto $\frac{r}{r'} = m$ e riducendo, $q - x : q - x - y :: a - x - y + m^2\,(a' + d) : a - x + \frac{dqm^2}{q-x}$ e di quì l'equazione Iª. $y^2 - [\,a + q + m^2\,(a' + d) - 2x\,]\,y = m^2 x\,(a' + d) - a'm^2 q$. Posto dunque per compendio $a + q = n$, $a' + d = a''$, verrà l'equazione IIª $y =$

$$\frac{n + a''m^2 - 2x \pm \sqrt{[(n + a''m^2 - 2x)^2 + 4m^2\,(a''x - a'q)]}}{2}:$$

ma supposta l'acqua nel livello XY, nel qual caso $x = 0$, e preso il radicale col segno negativo (giacchè il positivo darebbe $y > q$ e l'altezza dell'acqua nella tromba avrebbe una forza più grande di quella dell'aria atmosferica che ve la sostiene) si otterrà l'equazione IIIª. $y = \ldots$

$$\frac{n + a''m^2 - \sqrt{[\,(n + a''m^2)^2 - 4a'm^2 q\,]}}{2},$$ che determina

l'altezza TR dell'acqua o l'effetto del primo colpo dell'embolo. Questo valore sostituito in luogo di x nella IIª. equazione darà l'effetto del secondo colpo o l'altezza RP dell'acqua, e nuovamente sostituendo in luogo di x la somma dei due valori trovati, avremo l'effetto del terzo colpo ec. Così se sia $q =$ *pie.* 32, $r = 6$, $r' = 3$ onde $m = 2$, $a = 25$, $d = 0$ onde $n = 57$, ed $a' = a'' = 2$, si troverà l'effetto del primo colpo o l'altezza TR $= y = \frac{65 - \sqrt{(65^2 - 32^2)}}{2} = 4{,}25$ in circa, che posto in luogo di x nella IIª. equazione, dà l'altezza RP $= y = 4{,}25$, eguale presso a poco alla prima.

350. Dunque 1°. se si voglia una tromba *perfetta* in cui cioè l'acqua al primo colpo dell'embolo si alzi fino alla FIG.
valvula O, sarà $a = y$; e sostituito y in luogo di a nella Iª. 38.
equazione, supponendo al solito l'acqua in XY cioè facendo $x = 0$, verrà $y = a = \frac{a'm^2 q}{q + m^2(a' + d)}$. Data pertanto al tubo TN questa lunghezza, si avrà la richiesta tromba perfetta, e coi valori presi di sopra (349) si troverebbe che dee farsi TM $= a = 6\,\frac{2}{5}$. Ma quì si osservi una volta per sempre che se la tromba sia collocata in un luogo sensibilmente più basso o più alto di quello ove il barometro indica *poll.* $27\,\frac{1}{2}$ incirca, non si avrà più per l'acqua la corrispondente altezza $q = 32$: supposto dunque che il barometro segni un numero n di linee al di sopra o al di sotto dei *poll.* $27\,\frac{1}{2}$, il vero valor di q si fisserà facendo $q = 32 \pm 14\,n$, posta la gravità specifica dell'acqua a quella del mercurio come 1 a 14.

351. Dunque 2°. se il numeratore e il denominator del rotto $\frac{n + a''m^2 - \sqrt{[\,(n + a''m^2)^2 - 4a'm^2 q\,]}}{2}$ si moltiplichi per $n + a''m^2 + \sqrt{[\,(n + a''m^2)^2 - 4a'm^2 q\,]}$, la IIIª. equazione diverrà $y = \frac{4a'm^2 q}{2(n + a''m^2) + 2\sqrt{[(n + a''m^2)^2 - 4a'm^2 q]}}$ e perciò l'innalzamento dell'acqua al primo colpo dell'embolo sarà tanto più grande quanto più son grandi a', m, e quanto più son piccole a, d (L. 48). Usando lo stesso artifizio nell'equazione IIª. e fatto $dx = a'z$, verrà $y = \ldots$

$$\frac{4a'm^2\,(q - x - z)}{2\,(n + a''m^2 - 2x) + 2\sqrt{[\,(n + a'm^2 - 2x)^2 - 4a'm^2\,(q - x - z)]}},$$

onde dovendo y esser positivo, lo sarà anche $q - x - z$, e quindi i successivi innalzamenti dell'acqua saranno, come prima tanto più grandi quanto son più grandi a', m e quanto son più piccoli a, d: cioè in generale *l'acqua si innalzerà, tanto più nella tromba quanto sarà più stretto e più*

FIG. 38.

corto il tubo TN *in paragon del tubo* MB, *quanto sarà più lungo il tratto* HK *per cui scorre l'embolo, e quanto sarà più piccola la distanza* MH *dell'embolo dalla base* MN.

352. Dunque 3°. supposto che l'acqua abbia già ricoperta la valvula situata in TV e si trovi in RS, è chiaro che ella cesserà di salire subito che la forza dell'aria contenuta nel volume RN + ML unita al peso del cilindro aqueo TS farà equilibrio alla pressione dell'atmosfera. Per determinar questo caso osservo che trovandosi la valvula in TV, l'aria dopo il primo colpo è tornata a comprimersi (348) e per tutto lo spazio RI è atmosferica, onde in un volume v ha la forza $b\Gamma q$ (349): ma l'aria in RL è più rara ed in un volume V ha una forza ignota s; dunque (349) $b\Gamma q : s :: V : v :: RN + ML : RN + MI$ e però $s = \frac{b\Gamma q(RN+MI)}{RN+ML} = \frac{b\Gamma q(a+dm^2-x)}{a+m^2(a'+d)-x}$, a cui aggiungendo il peso $b\Gamma x$ del cilindro aqueo TS e facendo $a+dm^2=n$, avremo infine $b\Gamma x + \frac{b\Gamma q(n-x)}{n-x+a'm^2} = b\Gamma q$, equazione da cui si deduce $x = \ldots \frac{a'm^2+n-\sqrt{[(a'm^2+n)^2-4a'm^2q]}}{2}$, e però l'acqua cesserà di salire tutte le volte che il valor di x sarà reale. Ora ciò rende inutile la tromba; dunque *supposta la valvula in* TV *affinchè l'acqua continui ad alzarsi è necessario che si abbia* $4a'm^2q > (a'm^2+n)^2$ *o che la radice dell'equazione sia immaginaria*. Così presi i valori di sopra (349), sarà $4a'm^2q = 32^2$ ed $(a'm^2+n)^2 = 33^2$ e perciò l'acqua cesserà di salire: ma posto $m=3$, verrà $4a'm^2q = 2304$ ed $(a'm^2+n)^2 = 1849$, onde l'acqua continuerà ad innalzarsi.

353. Dunque 4°. se supposta la valvula in O e l'acqua in Z, si cerchi il caso medesimo del suo arresto nella tromba, fatto $TZ = x$, sarà $ZH = a + d - x$, $ZI = \pi r^2(a + d - x)$, $ZK = a + a' + d - x$, $ZL = \pi r^2(a + a' + d - x)$, e poichè si ha come prima (352) $b\Gamma q : s :: ZL : ZI :: a + a'$

+ d −

FIG. 38.

$+ d - x : a + d - x$ e però $s = \frac{b\Gamma q(a+d-x)}{a+a'+d-x}$, aggiunto il peso del cilindro aqueo $TW = b\Gamma x$, verrà l'equazione $b\Gamma q = b\Gamma x + \frac{b\Gamma q(a+d-x)}{a+a'+d-x}$ da cui si ottiene $x = \ldots \frac{a+a'+d-\sqrt{[(a+a'+d)^2-4a'q]}}{2}$, come si avrebbe anche dall'equazione di sopra (352) fatto $m = 1$. Pertanto anche in questo caso, cioè *supposta la valvula in* O, *la tromba produrrà sicuramente il suo effetto se si abbia* $4a'q > (a+a'+d)^2$ *o la radice dell'equazione sia immaginaria*.

354 Dunque 5°. se voglia determinarsi la forza f necessaria all'innalzamento dell'embolo quando l'acqua è giunta in ΔΠ e comincia a versarsi per F, si chiamerà $HI = b$, la base dell'embolo, $H\Delta = c$ l'altezza del cilindro aqueo sull'embolo, e si osserverà che posta S la pressione che resiste al suo innalzamento ed s quella che lo seconda, vi sarà equilibrio tra la forza f ed il peso dell'embolo quando si abbia $f = S - s$. Ma la pressione S è prodotta dal peso P dell'embolo, dal peso $b\Gamma c$ della colonna aquea HΠ e dal peso $b\Gamma q$ dell'atmosfera, onde $S = P + b\Gamma \times (c + q)$: e la pressione s nasce dalla forza con cui l'atmosfera gravitando sopra XY spinge contro l'embolo la colonna aquea TI e perciò è prodotta dal peso stesso $b\Gamma q$ dell'atmosfera meno il peso $b\Gamma(a + d)$ della colonna aquea TI (349), onde $s = b\Gamma(q - a - d)$; dunque $f = S - s = P + b\Gamma(a + c + d)$, cioè la forza necessaria all'equilibrio eguaglia i pesi dell'embolo e d'un cilindro d'acqua che abbia per base il piano HI dell'embolo stesso e per altezza la distanza TΔ del livello XY dallo sfogo F: perciò se si aumenti la forza d'un terzo del suo valore onde vinca gli attriti e passi dall'equilibrio al moto (227), si avrà l'innalzamento dell'embolo con una forza $f = \frac{4P+4b\Gamma(a+c+d)}{3}$.

Del resto quando la tromba versa l'acqua uniformemente e si conosce in pollici il diametro $HI = 2r$ dell'embolo, e lo

FIG. spazio u che egli scorre in 1″ salendo, è chiaro che si alzerà in questo tempo un cilindro d'acqua di base πr^2 e d'altezza u, onde lo scarico m dell'acqua in 1″ si troverà $m = \pi r^2 u$ *poll. cub.*

355. La *Tromba premente* è presso a poco la stessa tromba aspirante roversciata, le cui valvule si aprono al solito
38. all'insù ed il cui tubo MABN è immerso nell'acqua. L'essenzial differenza è 1°. che *la tromba premente non dipende dall' azione dell' aria e però non è sottoposta come l' aspirante* (351. 352. 353) *ad alcun caso d' insufficienza*: 2°. che laddove l'acqua nell'aspirante non può alzarsi più di *pie.* 32 (348), *nella tromba premente l' acqua s' inalza ad un' altezza qualunque* purchè si applichi all' embolo una forza proporzionata. Infatti immaginando roversciata la tromba TB, se si muova l'embolo all'ingiù, l'acqua premuta ne forza la valvula G, passa nella tromba LM e si mette a livello coll' acqua esteriore (310); e se si spinga l'embolo all'insù, si chiude la valvula G, l'acqua contenuta in LM urta la valvula O ed entra nel tubo MV, onde è chiaro che continuando il movimento, l'acqua è costretta a salire indefinitamente. La forza necessaria all'equilibrio con l'embolo eguaglia manifestamente i pesi dell'embolo e del cilindro aqueo che ha per base il piano dell'embolo e per altezza la distanza del livello dallo sfogo, come nella tromba aspirante.

356. La *Tromba Aspirante insieme e Premente* è la combinazione delle due fin quì descritte. Poco sotto all'ultimo limite HI a cui scende l'embolo, è unito al tubo MB un altro tubo ΣΘ in cui è la valvula Σ che si apre verso Θ, e l'embolo non ha più la valvula G: l'acqua giunge al solito sopra HI, e allora l'embolo scendendo la preme e la forza ad aprirsi per Σ il passo nel tubo ΣΘ. Anche in questa tromba l'acqua può dunque salire a qualunque altezza; e quanto alla forza totale $f + f'$ con cui l'embolo dee sollevarsi ed abbassarsi, ben si vede che nell'atto dell'innalzamento la pressione S che gli resiste, è prodotta dal peso

P di esso e dal peso $b\Gamma q$ dell'atmosfera, mentre la pressione s che lo seconda, nasce come sopra (354) dal peso $b\Gamma q$ dell'atmosfera meno il peso $b\Gamma\,(a + d)$ della colonna aquea TI, onde $f = S - s = P + b\Gamma q - [\,b\Gamma q - b\Gamma\,(a + d)\,] = P + b\Gamma\,(a + d)$: ma nell'atto dell'abbassamento, fatta IB $= c$ l'altezza dell'acqua in Θ al di sopra dell'embolo, la pressione S′ che gli si oppone, è prodotta dalla resistenza del cilindro aqueo $b\Gamma c$ che unitamente alla colonna atmosferica $b\Gamma q$ si dee sollevare, mentre la pressione s' che lo seconda, nasce dal peso P di èsso e dal peso $b\Gamma q$ dell' atmosfera che si appoggia sull' embolo, onde $f' = S' - s' = b\Gamma c + b\Gamma q - P - b\Gamma q = b\Gamma c - P$; dunque $f + f' = b\Gamma\,(a + c + d)$. Siccome però in tutte le macchine dee avvertirsi che il movimento sia uniforme (227) converrà dunque che si abbia $f = f'$, cioè $P + b\Gamma\,(a + d) = b\Gamma c - P$, e però $P = \frac{b\Gamma\,(c - a - d)}{2}$; onde 1°. bisogna che sia $c > a + d$ ovvero IB > IV, mentre se $c = a + d$, il peso è nullo, e se $c < a + d$, il peso è negativo, dei quali due casi niuno può aver luogo: 2°. se il livello XY non sia costante ed ora si abbassi l'acqua, ora s'innalzi, si dovrà diminuire o aumentar P, il che può farsi con pesi amovibili che or si tolgono ed or si aggiungono all'embolo.

357. La *Tromba a fuoco* fa le veci della forza applicata alle trombe finor descritte; poichè se girando la chiave ΞΛ, la canna Λ introduca nel tubo ΓΩ il vapor dell'acqua che bolle nella caldaja ΓΛ, la forza di questo vapore innalzerà l'embolo attaccato in D alla leva DC, e l'altro embolo CG discenderà; quindi se dal vasetto Ψ si scarichi uno spruzzo d'acqua fredda nel tubo ΓΩ, il vapore si condenserà subito in acqua, si ridurrà nel fondo del tubo e ne lascerà vuota la cavità, onde il peso dell'atmosfera gravitante sull'embolo lo abbasserà, sollevando intanto l'altro embolo CG: così la doppia azione del vapor dell'acqua e del peso dell'aria tengon luogo di forza, e producon senza fatica l'innalzamento dell' acqua nella tromba TΠ. Il tubo ΩΓ ha uno sfogo per cui

FIG. 38. si vuota il vapor condensato, ed un altro sfogo ha la caldaja ΓA per cui l'acqua destinata a cangiarsi in vapore si mantien sempre ad un' altezza determinata. Senza allungarci a descrivere più minutamente la macchina, ci limiteremo ad osservare che il suo buon effetto dipende dal combinare la pression del vapore e dell'atmosfera coi pesi attaccati alle braccia EC, ED della leva, e dal regolar questi pesi in modo che l'embolo in D, o si alzi o si abbassi, abbia sempre un moto uniforme.

358. Ora per avere un tal moto è necessario che la somma dei momenti di tutte le forze che innalzan l' embolo, eguagli la somma dei momenti di tutte quelle che lo deprimono: perciò se sia DE $= a$, EC $= b$ e si rappresenti con P la somma dei pesi sostenuti dalla leva in C, sarà P×CE $=$ bP il loro momento (05); e se si chiami $2r$ il diametro dell'embolo in D, πr^2 il suo circolo, q l' altezza del cilindro aqueo che con la base πr^2 eguaglia in peso lo sforzo dell'atmosfera, e v l'altezza d' un altro cilindro aqueo che con la base stessa πr^2 eguaglia in peso lo sforzo del vapore, sarà $\pi q r^2 \times ED = a\pi q r^2$ il momento dell'uno e $\pi v r^2 \times ED = a\pi v r^2$ il momento dell'altro: ma l'embolo in D è innalzato dai momenti bP, $a\pi v r^2$ del peso e del vapore diminuiti del momento $a\pi q r^2$ dell' atmosfera che agisce in contrario, ed all' opposto è abbassato dal momento $a\pi q r^2$ dell'atmosfera diminuito del momento bP del peso che agisce in contrario; dunque $bP + a\pi v r^2 - a\pi q r^2 = a\pi q r^2 - bP$, e però $P = \frac{a\pi r^2 (2q - v)}{2b}$, valore che dee darsi a P affinchè il moto dell' embolo abbia la richiesta uniformità. Così se sia $v =$ *pie.* 40 in circa, come lo dà l'esperienza, $a = 6$, $b = 3$, $q = 32$, sarà $P = 24\pi r^2$, cioè dovrà eguagliare un cilindro d'acqua alto *pie.* 24 sulla solita base πr^2.

359. La *Vite Idraulica d' Archimede* è un cilindro retto AG di legno, a cui è unito il tubo ACDHKE di metal-
39. lo che da un punto E della circonferenza FEG sale spiralmente fino ad A intorno al cilindro. Perchè la macchina

agisca è necessario che le spire sieno uniformi o che *l' angolo d' inclinazione* che fa la spira con le circonferenze elementari della superficie cilindrica, sia sempre lo stesso: perciò si avvolga al cilindro un triangolo rettangolo che abbia per un dei lati l' altezza BO e per l' altro la circon- 39.
ferenza FEGIF tante volte ripetuta quante spire si vogliono nella vite, ed esse uniformemente segnate dall' ipotenusa, determineranno con la lor traccia l' esatta situazion del tubo. Posto ciò, se il cilindro s' inclini all' orizzonte per FGP, e l' orifizio E del tubo immerso nell' acqua si faccia girar di continuo contro l' acqua stessa, ella salirà lungo le spire fino a versarsi per lo sfogo A.

360. Le proprietà di questa macchina tuttochè semplicissima, sono assai difficili a svilupparsi, atteso il moto estremamente composto a cui l' acqua vi è soggettata; basti perciò di indicarne le principali. Dall' orifizio o punto E comune al circolo EGI ed alla spira EKH si conducano alle due curve le tangenti EP, ER determinatrici dell' angolo costante PER d' inclinazione (359), le quali concorrano in P, R con la retta QR in cui termina il piano orizzontale RT steso per il punto P ove si segano la tangente circolare EP e il diametro prolungato FGP. Se l' angolo PER che fanno le tangenti, sia minor dell' angolo EPQ che l' arco circolare infinitesimo E fa con l' orizzonte, è chiaro che l' acqua entrerà per E, e nella direzione di ER scenderà come per un piano inclinato nel piccolo arco della spira, d' onde col meccanismo accennato (359) salirà in A: ma se l' angolo PER eguagli l' angolo EPQ, le rette ER, PQ saranno parallele e perciò orizzontali, onde l' acqua non potrà scendere nella spira, e la macchina resterà senza effetto. Determinata pertanto quella posizion della vite in cui gli angoli EPQ, PER sono eguali, si saprà subito la posizion da evitarsi per ottenere l' innalzamento dell' acqua.

361. Conduco per E l' ordinata EL e il raggio EO, e dai punti L, E sul piano orizzontale RT le rette LS, EQ normali al circolo FEG, e perciò anche normali quella al

FIG. 39.

diametro FG, questa alla tangente EP (L. 617); e per essere LE parallela all'orizzonte, sarà $LS = EQ$. Sia il raggio $OE = R = 1$, l'ascissa $OL = x$, l'ordinata $LE = y = \sqrt{(1 - x^2)}$, l'angolo $FPQ = \varphi$ inclinazione della macchina, e l'angolo $PER = \theta$ ($= EPQ$ per ipotesi) inclinazion della spira alla circonferenza (359). Poichè dunque il triangolo PLS è rettangolo in L, sarà (L. 749) $1 : tang\,\varphi :: PL : LS$, onde $LS = EQ = PL\, tang\,\varphi$: ma nel triangolo PEQ rettangolo in E abbiamo $1 : tang\, EPQ :: PE : EQ$; dunque $tang\, EPQ = \frac{EQ}{PE} = \frac{PL\, tang\,\varphi}{PE}$. Ora il triangolo OEP rettangolo in E (L. 496) dà $EP : PL :: OE : EL :: 1 : \sqrt{(1 - x^2)}$, onde $\frac{PL}{PE} = \sqrt{(1 - x^2)}$; dunque infine $tang\, EPQ = tang\,\varphi \sqrt{(1 - x^2)} = tang\, PER = tang\,\theta$, cioè risolvendo l'equazione e riducendo, $x = \pm cot\,\varphi \sqrt{(tang^2\varphi - tang^2\theta)}$.

362. Dunque 1°. vi son due casi relativi al doppio segno di x, in cui gli angoli PER, EPQ divenendo eguali, impediscono all'acqua di scendere nella spira per quindi innalzarsi. I due casi sono espressi dai valori dell'ascisse OL, O*l* egualmente distanti dal centro O; cosicchè immersa nell'acqua la base FEG fino alle corde EI, *ei*, la macchina sarà del pari inefficace, o per dir meglio saranno EI, *ei* i limiti della sua inefficacia. Se fosse $\theta = \varphi$, verrebbe $x = 0$ a cui corrisponde per ordinata il raggio o diametro della base; dunque la macchina non può operare se la base si immerga precisamente fino al diametro. Ma se fosse $\theta > \varphi$, si avrebbe x immaginaria, cioè sarebbe impossibile un'ascissa OL in cui l'angolo PER divenisse eguale ad EPQ, e perciò molto più impossibile un'ascissa OL in cui PER fosse minore di EPQ come è necessario perchè la macchina agisca (360). D'onde si raccoglie che *quanto son più rare le spire tanto è più dubbioso l'innalzamento dell'acqua*, e che per l'opposto la loro poca inclinazione sempre più lo assicura, ciò che anche dalla natura medesima della macchina si manifesta.

FIG. 39.

363. Dunque 2°. poichè quando $OL = x = \pm cot\,\varphi \times \sqrt{(tang^2\varphi - tang^2\theta)}$, l'acqua non può discendere, converrà per aver l'intento, che resti sommersa almeno tutta la corda $IE = 2\sqrt{(1 - x^2)} = \frac{2 tang\theta}{tang\,\varphi}$ (361). Così se sia $\theta = 45°$, $\varphi = 53°, 8'$, si avrà $EL = sen\, EG = \frac{tang\, 45°}{tang\, 53°, 8'} = sen\, 48°, 35'$: onde quando il seno si prende da O verso G, l'arco sommerso dovrà essere almeno di $2(48°, 35') = 97°, 10'$, e quando si prenda da O verso F, l'arco sommerso dovrà essere di $360° - 97°, 10' = 262°, 50'$.

364. Dunque 3°. se la corda IE divenisse nulla, cioè s'immergesse tutta la base, sarebbe $EI = \frac{2 tang\theta}{tang\,\varphi} = 0$, il che dà due casi: 1°. $2\, tang\,\theta = tang\,\varphi \times 0 = 0$ e $PER = 0$, onde il sommerger tutta la base non differisce quanto all'effetto dal render nullo il costante angolo PER d'inclinazion della spira e far coincidere la circonferenza del circolo con la spira stessa: ma in questo caso l'acqua non potrebbe alzarsi come è evidente; dunque del pari *non si avrà innalzamento d'acqua se s'immerga tutta la base*: 2°. $tang\,\varphi = \frac{2 tang\,\theta}{0} = \infty$: ma la tangente infinita corrisponde all'angolo retto (L. 692): dunque $\varphi = FPQ$ sarebbe un angolo retto, e perciò non solo la base, ma anche tutta la macchina sarebbe sommersa, nel qual caso è chiara la sua inutilità. Perchè dunque possa l'acqua innalzarsi, è forza che una parte della base ne sia fuori, e allora l'orifizio E successivamente esposto all'acqua ed all'aria, si empirà dell'uno e dell'altro fluido, e lo scarico dell'acqua in A sarà intermittente, quale infatti si osserva.

Non parleremo quì di un'altra macchina assai recente che dalla catena o fune per cui l'acqua spontaneamente s'innalza, vien detta *Funicolare*: i suoi effetti visibilmente dovuti alla viscosità del fluido, sono in parte distrutti dalla contraria forza di gravità, onde non possono esser mai molto considerabili, e saranno sempre assai inferiori a quelli che si otterrebbero con un sistema qualunque di piccole secchie.

PARTE SECONDA

TEORIÀ DE' FLUIDI IN MOTO

Natura de' Fluidi in Moto.

365. IL fluido che quì principalmente abbiamo in vista è l'acqua, e il solo moto del quale intendiamo di parlare è quello che è prodotto in essa dall'azione non impedita della gravità (302). Come questo è il più utile se sia ben regolato, e può cagionar per l'opposto dei danni immensi se l'acqua si lasci correre a suo capriccio, i Matematici si sono con molto studio applicati ad osservarne le proprietà e a stabilirne le leggi, benchè le cagioni altrove indicate (303) abbiano fin quì resa vana la più gran parte delle recenti esperienze e delle ingegnose ipotesi con cui hanno tentato o di sorprendere o di indovinar la natura. Quanto a noi, le ragioni già riportate nel Discorso Preliminare, ci vietano ogni innovazione in questa materia.

L'idea completa dell'acqua in moto abbraccia più cose: il *recipiente* da cui ella esce, il *letto* per cui scorre, la *celerità* che vi acquista, e gli *ostacoli* che v' incontra.

366. Grandi ricerche si son fatte sui fenomeni che presenta l'acqua nell'uscire dal piccol foro o *lume* dei suoi *recipienti* o conserve, ed ecco a che può ridursene la più util dottrina. O sia che le molecule aquee si affollino con disordine al foro, o che vi si presentino obliquamente e con opposte direzioni onde s' imepdiscano a vicenda l'uscita, è certo che la *vena fluida* vi si contrae, e secondo le più esatte

 FIG.

satte esperienze di Bossut, il *volume* o *portata* o quantità effettiva d'acqua che ne esce sta alla portata teorica che dovrebbe uscirne come 5 a 8, o almeno (se il lume sia armato d'un tubo) come 13 a 16: cosicchè esprimendosi evidentemente questo volume dal prodotto dell'area b del foro per la lunghezza l della colonna fluida (L. 647.), la portata teorica bl diviene effettivamente $\frac{5bl}{8}$ o $\frac{13bl}{16}$ o in generale $\frac{mbl}{n}$ supposto $m=5, n=8$ ovvero $m=13, n=16$.

367. Per altro questo ristringimento di vena che diminuisce le quantità dell'acqua effluente, non ne turba punto l'efflusso, e l'acqua esce dai piccoli lumi dei recipienti coi consueti fenomeni d'un projettile. Per dimostrare questa fondamental verità suppongo che attesa la piccolezza del lume, gli strati superiori del fluido perdano le loro celerità, e che il fluido perciò eserciti una stessa forza o pressione e quando è in quiete e quando è in movimento; e benchè tale ipotesi non piaccia ad alcuni Idraulici, se però le conseguenze dedotte da essa corrispondano ai concordi esperimenti dei più famosi Scrittori, ella ad onta di quanto è stato detto per impugnarla, dovrà riguardarsi come una legge della natura. Pertanto dai due recipienti AB, CD costantemente pieni esca l'acqua per i piccoli lumi o *emissa-* 40.
rj E, E' distanti dai livelli A, C di AE $= p$ e di CE' $= \pi$, e si abbiano in un tempo stesso t le portate d'acqua $\frac{mbl}{n}$, $\frac{m\beta\lambda}{n}$ (366). Poichè l'altezza dell'acqua nelle due conserve è costante, le quantità che usciranno da ognuna in tempi eguali saranno eguali, e il moto dell'acqua nella sua uscita sarà uniforme; si avranno dunque le celerità $c = \frac{s}{t}$, $c' = \frac{s'}{t}$ (22) ed essendo gli spazj $s = EH = l$, $s' = E'I = \lambda$ (366), verrà $c : c' :: l : \lambda$ ovvero $c = \frac{c'l}{\lambda}$: ma le forze o quantità di moto

FIG.
40 delle due colonne aquee sono $F = cM$, $F = c'M'$ (23), cioè $F : F' :: cM : c'M' :: \frac{mblc\gamma}{n} : \frac{m\beta\lambda c'\gamma}{n}$ (9.309), e queste forze del fluido in moto si esprimono, secondo la nostra ipotesi, come le forze del fluido in quiete onde $F = b \times p \times \gamma$, $F' = \beta \times \pi \times \gamma$ (309.320); dunque $bp : \beta\pi :: blc : \beta\lambda c'$ o sostituito il valor di c già trovato, $l^2 : \lambda^2 :: p : \pi$ ed $l : \lambda :: c : c' :: \sqrt{p} : \sqrt{\pi}$, cioè *le lunghezze o celerità delle colonne* EH, E'I *sono come le radici dell' altezze* AE, CE' *dell' acqua*. Ora questo teorema si trova esattamente conforme all' esperienze di quelli stessi che ne contrastarono il fondamento, per non parlar dell' altre ancor più certe di Michelotti e di Bossut.

368. Segue da ciò che *supposti eguali i tempi* t *e i lumi* b, β, *le portate per questi lumi armati o disarmati* (366) *sono come le radici dell' altezza costante dell' acqua nei recipienti*; poichè fatto $b = \beta$ si avrà $\frac{mbl}{n} : \frac{m\beta\lambda}{n} :: l : \lambda :: \sqrt{p} : \sqrt{\pi}$. Del pari *supposte eguali le costanti altezze dell' acqua e i tempi, le portate per i lumi* b, β *armati o disarmati saranno come l' aree dei lumi*, poichè fatto $p = \pi$, sarà $l = \lambda$ ed $\frac{mbl}{n} : \frac{m\beta\lambda}{n} :: b : \beta$.

369. Segue ancora che avendosi $\sqrt{p} : \sqrt{\pi} :: l : \lambda :: c : c'$ e però $p : \pi :: c^2 : c'^2 :: \frac{c^2}{2g} : \frac{c'^2}{2g}$ l' altezza $p = \frac{c^2}{2g}$ (11) sarà la dovuta alla celerità c dell' acqua (70), ove $p = \frac{c^2}{2g}$ è proporzione insieme, ed equazione assoluta che dà l' assoluta misura della celerità dell' acqua nell' uscir dai piccoli lumi, quale la dimostrarono Bossut e Fontana, benchè Parkinson con un raziocinio di cui non sembra soddisfatto, la riduca a $\frac{p}{2} = \frac{c^2}{2g}$. Quindi $F (= b \times p \times \gamma) = b \times \frac{c^2}{2g} \times \gamma$, cioè *la forza della pressione o urto diretto dell' acqua eguaglia il peso d' un prisma d' acqua la cui base è l' area*

FIG.

urtata, e l' altezza è la dovuta alla celerità dell' acqua. Anche questo importante teorema fu confermato dalle famose esperienze di d' Alembert, di Condorcet e di Bossut.

370. Segue infine che essendo p l' altezza dovuta alla celerità c dell' acqua, le molecule spinte per l' emissario E
descriveranno la parabola dell' equazione $S^2 = 4ps$ (193) in 40.
cui il parametro è $4p = 4AE$, l' ascissa $EG = s = q - p$ (fatta l' altezza $AG = q$), e l' ordinata $GF = S = 2\sqrt{[(q-p)p]}$. Quindi se si voglia il punto E a cui corrisponde la massima ampiezza orizzontale GF della parabola, differenziando il valor di GF, si avrà $\frac{dGF}{dp} = \frac{q-2p}{\sqrt{[(q-p)p]}} = 0$ onde $p = \frac{q}{2}$, cioè il massimo cercato si ha quando l' emissario E occupa il mezzo dell' altezza AG del recipiente. Il che dimostra 1°. che in tal caso l' ampiezza GF $(= 2\sqrt{[(q-p)p]} = 2\sqrt{\frac{q^2}{4}} = q)$ eguaglia l' altezza AG del vaso: 2°. che aperti due emissarj in KL ad eguali distanze $EK = EL = h$ dal punto medio E, le due parabole KO, LO avranno una medesima ampiezza GO; poichè nella parabola KO sarà $GO^2 = 4\, AK \times KG = 4\left(\frac{q}{2} - h\right)\left(\frac{q}{2} + h\right)$, e nella parabola LO si avrà del pari $GO^2 = 4\, AL \times LG = 4\left(\frac{q}{2} + h\right) \times \left(\frac{q}{2} - h\right)$. E quì pure gli esperimenti si trovano sì ben d' accordo con la teoria, che attese l' altezze quasi sempre mediocri delle conserve e perciò le celerità non molto grandi del fluido, la curva parabolica non è sensibilmente alterata neppur dalla solita resistenza dell' aria (197).

371. Del resto supponendo AB la conserva costantemente piena dal cui fondo G esca l' acqua per muoversi sul piano inclinato GM, se dallo *sbocco* o punto estremo M si conduca l' orizzontale MP fino al prolungamento della verticale AG, sarà $AP = NM$ la *vera altezza dell' acqua sopra lo sbocco* e l' altezza GA potrà chiamarsi *carico d' acqua*.

372. Il *letto* o *alveo* dell'acque correnti allorchè formano un *Fiume* o *Canale* (poichè se formino un *Condotto*, questi nomi non hanno luogo) è una cavità naturale o artificiale aperta in terra o dalla forza dell' acque stesse o dalla mano degli uomini. La parte inferiore dicesi *fondo* e le laterali si chiamano *sponde* o *rive* sulle quali si alzano gli *argini* se tutta l'acqua non possa correre incassata nel terreno. I letti naturali che sono i più comuni, hanno ordinariamente molte irregolarità nella lor forma, direzione, larghezza e fondo. Se nel caso di escrescenza o *piena*, la tenacità del terreno facesse perfettamente equilibrio all' urto dell' acqua, il fiume avrebbe una *forza esatta* e un *letto stabile*: ma come la resistenza dei terreni rare volte eguaglia il diverso impeto della corrente onde in un luogo è corroso il fondo e le rive, mentre in un altro son deposti i sassi, le ghiaje, l' arena e la terra, quindi è che i fiumi hanno spesso una forza *troppo grande* o *troppo piccola* e in ambedue i casi un *letto istabile*, d' onde poi nascono le *tortuosità* o serpeggiamenti, i *gorghi* o escavazioni del fondo, i *ridossi* o rialzamenti, le *diramazioni* ec.

373. Esaminando però in generale l' opera della natura nello stabilimento del letto d' un fiume, si osserva che l' alveo è tanto più incavato ed il fondo tanto più vicino all' orizzontale condotta dalla foce, quanto è più grande il volume d' acqua ch' ei porta: perciò i letti hanno verso il mare piccolissima quella pendenza che si trova sì considerabile risalendo alla sorgente, e l' alveo dalla sorgente allo sbocco non si dispone già in un piano inclinato uniforme, ma in una curva concava verso l' acqua o per dir meglio in una serie di piani inclinati contigui le cui pendenze vanno sempre diminuendo verso lo sbocco. Si osserva ancora che ogni fiume tende di sua natura a scorrere stabilmente, e se una cagione estranea alzandone o profondandone il letto, e stringendone o allargandone le rive più del dovere, turbi la sua forza esatta, l' acqua cresce o scema subito di celerità nei luoghi alterati, trasporta o deposita i sassi e l' are-

na, scava o riempie il fondo, dilata o ristringe le rive, e
non cessa per così dire dal suo travaglio finchè non abbia
rimesso tutto nello stato di prima. Di quì è che gli alvei
dei fiumi si alzano continuamente con grave danno delle pia-
nure adjacenti, nel che or la negligenza ed ora l' arte in-
felice degli uomini sembra congiurar con la natura. Poichè
i fiumi deponendo naturalmente allo sbocco tutte le mate-
rie che hanno fin là strascinate, continuano tramezzo a que-
ste *alluvioni* il loro corso, e quel fiume che una volta sboc-
cava in I con l' inclinazione DIE, si riduce appoco appoco 41.
a sboccare in F con l' inclinazione assai minore DFE: ma la
forza esatta richiede un inviolabil declivio DIE; dunque l'
acqua riempirà con le torbe tutto il vuoto DIFM fino a cor-
rer per MF parallela a DI, e l' alveo si rialzerà da DI fi-
no ad MF. Questo disordine è irreparabile se non si giunga
ad abbattere l' alluvione IF o se un maggior corpo d' acque
non compensi il minor declivio, due rimedj il più delle vol-
te impraticabili. Ma il permettere che i fiumi corrodano a
capriccio il terreno e con enormi tortuosità si allunghino il
corso, il coltivar le montagne la cui terra scommossa scen-
de ben presto a riempire il letto dei fiumi e costringe l' ac-
qua a strascinare oltre i consueti limiti le grosse materie,
questo è un alterar volontariamente l' inalterabil pendenza
dell' alveo e contribuire con grande efficacia al suo pronto
rialzamento.

374. L' alveo si divide in sezioni e la *sezione* è un pia-
no normale al fondo ed alle rive. Sia essa un rettangolo BC 42.
e suppongasi stabile il letto del fiume (372); o l' acqua che
vi scorre è chiara o è torbida: se è chiara, non potendo for-
marsi nè gorghi nel fondo nè corrosioni negli argini perchè
il letto è stabile, e mancando ogni cagion di ridossi e di
ristringimenti perchè mancano all' acqua le materie da de-
porre, è manifesto che la sezione si conserverà sempre rettan-
golare. Ma se l' acqua è torbida, avendo ella tanto men di
forza quanto è più lontana dalla massima corrente o *filone*
AE, perchè la sua viscosità e l' attrito delle sponde la ren-

dono sempre più inerte, lascerà cader la torba di quà e di
42. là da AE in H, I e cresceranno le deposizioni in L, M a misura che si troverà più remota dal filone e più vicina alle rive; perciò la primitiva sezione BC si ristringerà, il *pelo* o livello dell' acque dovrà rialzarsi e quindi aumentandosi o la sua celerità o il suo peso, la forza ne diverrà troppo grande (372) il fondo sarà scavato in K, le rive saranno corrose e dilatate in G, F e lo scavamento e la corrosione non cesseranno finchè la forza non sia ridotta alla consueta esattezza. Or poichè l' acque dei fiumi quasi sempre son torbide, è facile intendere perchè le loro sezioni non son mai rettangolari, ma piuttosto per la natura e del terreno che rare volte può reggersi a picco, e del fiume che deposita e rode, s'inclinano a *scarpa* come LG, MF; e quand' anche le sponde sieno rivestite di muro, pur gli angoli C, D si riempiono e la sezione verso le rive a grado a grado s' incurva e si rialza. Ad onta però di tanta irregolarità di sezioni, se l' Idraulico ne incontra alcune tanto ristrette che quasi tutta l' acqua vi sia in moto, e tanto lontane dalle svolte, dai ringorghi, dalle corrosioni e dalle *rotte* o aperture degli argini che il moto dell' acqua non ne sia sensibilmente alterato, a queste dà il nome di sezioni *libere*, *vive* o *regolari*, e di queste sole fa uso nell' operazioni idrometriche.

375. Trovata una sezione viva, bisogna misurarla e riquadrarla. Si misura attraversando il fiume con un forte canapo e facendo scorrere lungo di esso il *piede misura* che porti nella sua estremità uno scandaglio o asta normale di legno: il piede continuamente applicato al canapo misurerà la larghezza della sezione, e lo scandaglio immerso ad eguali distanze fino al fondo del fiume ne darà le diverse altezze; onde poi sarà facile di disegnar la sezione in tutte le sue proporzioni ed applicarvi anche il metodo delle interpolazioni (L. 974.) se tanta esattezza possa credersi necessaria. Ciò fatto, la sezione si riguarda o come un poligono irregolare o come una curva, e in ambedue i casi può averse-

ne o l' esatta o l' approssimata quadratura (L. 609. 1115).

376. La *celerità* dell' acqua è varia nei varj punti d' una sezione, come poco fa si è detto (374). Altre volte i filetti fluidi ritardati dalla resistenza del letto si solean distinguer da quelli che collocati nel filone non soffrono questo ostacolo; ma non trattandosi in pratica di determinar le celerità dell' acqua nei diversi luoghi d' un fiume, ed all' incontro importando unicamente di ridurle ad una *celerità media* da cui può dipendere l' essenzial dottrina sui fiumi, ha prevaluto infine il metodo di considerare in grande il moto dell' acque, e tutti gli Idraulici si sono applicati a fissar questa media celerità.

377. Tra le molte macchine immaginate a tale oggetto è celebre il *Quadrante Idrometrico*. Sull' acqua, che corre o- 43.
rizzontalmente per ET si ponga verticale il quadrante graduato ACB dal cui centro C penda il filo CH col globo H d' una specifica gravità un poco maggiore di quella dell' acqua, e concepita AG parallela ad ET e tangente in A, è chiaro che la forza dell' acqua trasporterà il globo dalla verticale CA all' obliqua CH e lo sosterrà in un certo angolo o *deviazione* ACH; onde se dal centro H del globo si alzi la verticale HO e si conduca l' orizzontale OL, le forze del peso, dell' acqua e del filo che agiscono insieme sul globo per le direzioni OH, LO, HL, si faranno equilibrio giacchè il globo riposa, e saranno espresse dalle stesse rette OH, LO, HL (96). Sia dunque q il peso del globo nell' acqua, e la forza di essa si chiami f; fatto il raggio CA $= 1$ e l' angolo ACH $= \theta$, avremo $q : f :: OH : LO :: CA : AF :: 1 : \tang \theta$ ed $f = q \tang \theta$; e poichè per un' altra situazion del globo ove fosse F la forza dell' acqua e Θ la deviazione, si troverebbe del pari $F = q \tang \Theta$, sarà $F : f :: \tang \Theta : \tang \theta$. Ora $F = MC$, $f = mc$ (23) ed M, m esprimono le masse o molecule aquee che in un dato tempo incontrano il globo e che essendo evidentemente in tanto maggior numero quanto son più grandi le lor celerità C, c, corrispondono in proporzione alle celerità stesse e ci danno $M : m :: C :$

e ovvero $M = C$, $m = c$ (11); dunque $F = C^2$, $f = c^2$ e quindi $C^2 : c^2 :: tang\,\Theta : tang\,\theta$, e $C : c :: \sqrt{tang\,\Theta} : \sqrt{tang\,\theta}$, cioè *le celerità dell'acqua sono come le radici delle tangenti di deviazione*.

378. Quindi se per mezzo d' un galleggiante, come d' un globo di cera che situato or verso le rive ed or nel filone trascorra un certo spazio in un certo tempo, si esplori l' assoluta celerità C dell' acqua nella sua superficie e si prenda col Quadrante la deviazione Θ nella superficie medesima, si avrà subito per qualunque altro luogo del fiume l' assoluta celerità $c = \frac{C\sqrt{tang\,\theta}}{\sqrt{tang\,\Theta}}$; onde replicando l' osservazioni a varie altezze dell' acqua e in varj luoghi del fiume si avrà una serie di diverse celerità la cui somma totale s divisa per il numero n dell' osservazioni darà finalmente la cercata celerità media $k = \frac{s}{n}$. Del resto, quanto si è detto d' un' acqua che si muove orizzontalmente, potrebbe applicarsi a qualunque acqua di corso inclinato: ma il Quadrante che in un placido Canale può essere di molto uso, non ne ha quasi alcuno nelle furiose correnti che pur sono le più comuni: la curvatura ed il tremore del filo a cui il globo è sospeso, la difficoltà di conservar l' istrumento immobile e verticale, e la varietà del peso che esige il globo in diversi fiumi e in diversi strati d' un fiume stesso a cagione delle diverse celerità dell' acqua, rendono sì spesso erronee o almen dubbiose l' osservazioni, che appena vi è in oggi Idraulico di qualche merito che se ne fidi.

379. Conosciuta per altro la media celerità k, sarebbe facile di dedurne la portata q d' acqua in un dato tempo; poichè quest' acqua formando un prisma che ha per base la sezione del fiume e per altezza o lunghezza la stessa media celerità, se la sezione sia b, la portata sarà $q = bk$ (L. 647.) Ove si osservi che in generale *nello stato* permanente *o immutabile d' un' acqua in moto, da ineguali sezioni* b, b' *si hanno in egual tempo eguali portate* $q = bk = b'k'$, altrimenti

menti l' acqua o si alzerebbe continuamente o continuamente si abbasserebbe, il che ripugna all' ipotesi dello stato permanente. Per conoscer dunque la portata d' un fiume nel suo stato di permanenza basta determinarne la media celerità in una sola sezione libera e viva (375).

380. Finalmente gli *ostacoli* che incontra l' acqua sono l' asprezze degli alvei per cui si muove: urta ella in queste asprezze e perde nell' urto una porzione della sua celerità. Ma la general dottrina sull' urto dei fluidi meritando di esser trattata a parte, comincieremo da questa la teorìa dei fluidi in moto e frattanto osserveremo 1°. che o si supponga un fluido mobile che incontri un ostacolo in riposo, o un fluido stagnante che sia incontrato da un ostacolo in movimento, il raziocinio per ambedue i casi è manifestamente lo stesso: 2°. che se il fluido m si muova con una celerità χ e il solido M lo sfugga o lo incontri con una celerità k, l' effetto dell' urto sarà relativo nel primo caso alla differenza, nel secondo alla somma delle celerità, e potrà concepirsi che M riposi e che il fluido m abbia o la celerità $\chi - k$ se M lo sfugge, o $\chi + k$ se l' incontra: 3°. che per fissare in qualche modo le leggi dell' urto convien supporre che le molecule fluide urtando il solido non s' impediscan tra loro; or questa ipotesi non ben conforme al vero, rende incerta e bisognevole di correzioni la teorìa, come vedremo.

Urto dei Fluidi in moto.

Già si avvertì (380) che o si muova un fluido contro un solido in quiete, o un solido contro un fluido tranquillo, il risultato è lo stesso: non si dovrà dunque stupire se considereremo il moto talor nell' uno e talor nell' altro.

381. Sia il corpo M che col suo piano AD e con la celerità c investa direttamente lo stagnante strato fluido CN d' una grossezza infinitesima g. Fatto $e = 0$ nella formula generale dell' urto (209) e posto c in luogo di C, abbiamo il 44.

FIG. 44. moto perduto dal solido M o la resistenza opposta dal fluido $R = \frac{nmMc}{M+m}$ ovvero poichè la massa m del fluido è infinitesima, $R = \frac{nmMc}{M} = nmc = n\gamma vc$ (9.305), cioè per esser v la solidità geometrica (9) o il prodotto dell' area $AD = a$ nella grossezza g dello strato (L. 647.), $R = nac\gamma g$. Ora se il corpo M penetri il fluido per un tratto o spazio infinitesimo $CB = ds$, il numero delle resistenze R eguaglierà il numero b degli strati che sono in CB, e per la resistenza totale r si avrà $r = b\ nac\gamma g$: ma il numero b degli strati eguaglia il numero dei globetti fluidi che entrano in CB e che hanno per diametro la grossezza g dello strato; dunque (L. 36) $b = \frac{CB}{g} = \frac{ds}{g} = \frac{cdt}{g}$ (35), onde infine $r = nac^2\gamma dt$, espressione della resistenza che nel tempo dt infinitesimo soffre in un fluido della gravità specifica γ un corpo solido in movimento, che urta direttamente il fluido col piano a e con la celerità c.

382. Dunque 1°. la resistenza r' sofferta da un altro corpo in un altro fluido con le medesime circostanze, sarà $r' = n'a'c'^2\gamma' dt$, onde $r : r' :: nac^2\gamma : n'a'c'^2\gamma'$, analogìa da cui nei varj casi di $n = n'$, $c = c'$, $\gamma = \gamma'$ ec. potranno dedursi moltissimi teoremi e specialmente quelli sì celebri. 1°. che *le resistenze opposte da un fluido al mobile sono come i quadrati delle celerità del mobile*: 2°. che *le resistenze opposte da un fluido a varj piani che con egual celerità lo incontrano, son proporzionali ai piani stessi.*

383. Dunque 2°. se riposando il solido si muova il fluido con la celerità media χ, la forza f comunicata dal fluido al solido sarà $f = na\chi^2\gamma dt$; e se movendosi il fluido con la celerità χ, il solido lo sfugga o lo incontri con la celerità $\pm k$, si avrà per ambedue i casi (380) $f = na\gamma(\chi \mp k)^2 \times dt$.

384. Per altro la formula $r = nac^2\gamma dt$ suppone che il piano a si presenti al fluido direttamente: cerchiamo pertanto la resistenza diretta r' per un piano obliquo a' e supponghiamo che i fluidi X, Y delle gravità specifiche γ, γ' sieno urtati dai piani $AB = a$ direttamente e $KD = a'$ obliquamente nell' angolo d' incidenza $EKD = \phi$, quello con la celerità c, questo con la celerità $c' = IG$ nella direzione de' filetti fluidi KE. Risoluta IG nelle due GH, HI, l' una parallela e l' altra normale a DK, delle quali la sola IH produce l' urto diretto, sarà $r : r' :: n a\gamma c^2 : n'a'\gamma'.IH^2$ (382): ma condotta sul filetto fluido KE la normale DE, i triangoli rettangoli simili KDE, GIH danno $IH = \frac{ED.IG}{KD} = \frac{c'.ED}{KD}$ ed $ED = \frac{KD\,sen\,\phi}{R}$ (L. 759); dunque $r : r' :: nac^2\gamma : \frac{n'a'c'^2\gamma' sen^2\phi}{R^2}$. Per un altro piano diversamente obliquo in un diverso fluido si avrebbe dunque $r : r'' :: nac^2\gamma : \ldots\ldots \frac{n''a''c''^2\gamma'' sen^2\phi'}{R^2}$, onde per due piani obliqui qualunque $r' : r'' :: n'a'c'^2\gamma' sen^2\phi : n''a''c''^2\gamma'' sen^2\phi'$. FIG. 45.

385. Dunque se i fluidi sieno della medesima specie e perciò $n = n'$, $\gamma = \gamma'$, si avrà $r : r' :: ac^2 : \frac{a'c'^2 sen^2\phi}{R^2}$. Se di più i piani urtino o sieno urtati dai fluidi con una stessa celerità e però anche $c = c'$, verrà $r : r' :: a : \frac{a' sen^2\phi}{R^2}$. Se inoltre i piani sieno eguali o lo stesso piano si esponga al fluido prima direttamente e poi obliquamente, si avrà $a = a'$ ed $r : r' :: 1 : \frac{sen^2\phi}{R^2} :: R^2 : sen^2\phi$. Infine se in vece del piano AB si prenda il piano ED in modo che i due piani ED, KD incontrino l' uno direttamente e l' altro obliquamente un egual numero di filetti fluidi, posta l la larghezza di ambedue sarà $a' = KD.l$, $a = ED.l = \frac{KD.l.sen\,\phi}{R}$, ed $r : r' :: \frac{KD.l.sen\phi}{R} : \frac{KD.l.sen^2\phi}{R^2} :: R : sen\,\phi$.

FIG.

46.

386. Quest' ultimo è il caso d' una sfera ovvero (poichè l' urto contro una sfera si riduce al solo urto contro l' emisfero) d' un emisfero DAB urtante o urtato dal fluido MM. Suppongasi nato l' emisfero dalla rivoluzion del quadrante CAB intorno al semiasse $CA = b = CP$ (L. 632), e si prendano l' ascissa $CG = x$ e l' ordinate infinitamente vicine $GP = y$ e gp: è chiaro che le due zone FH, LN generate l' una obliquamente al fluido dall' archetto Pp, l' altra normalmente dalla lineetta $Gg = dx$, urteranno con forze infinitesime dr', dr un egual numero di filetti fluidi, onde $dr : dr' :: R : sen\,GPp$ (385) $:: CP : PG$ (L. 504) $:: b : y$, e $dr' = \frac{ydr}{b}$: ma dr è misurata dal piano o zona normale LN (382) ed $LN = 2\pi x dx$ differenziale del contiguo circolo $OIG = \pi x^2$ (L. 606); dunque $dr' = \frac{2\pi yxdx}{b} = \frac{2\pi xdx\sqrt{(b^2 - x^2)}}{b}$ (L. 565) il cui integrale darà l' urto o resistenza della superficie FAP generata dall' arco indefinito AP, cioè $r' = \frac{-2\pi(b^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b} + Cost.$ (L. 1020), e poichè l' urto manca al mancar dell' arco AP, nel qual caso si ha $CG = x = 0$, sarà $0 = \frac{-2\pi b^3}{3b} + Cost.$ e $Cost. = \frac{2\pi b^2}{3}$; onde l' integrale completo $r' = \frac{2\pi b^2}{3} - \frac{2\pi(b^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$; ove posto $x = b$, viene l' urto $r' = \frac{2\pi b^2}{3}$ contro l' intero emisfero, eguale all' urto diretto contro i due terzi del circolo massimo πb^2 dell' emisfero medesimo (382).

387. Quest' urto però è normale a Pp (384) o nella direzione di PC; quindi volendolo nella direzione del fluido stesso o di PG, quale ordinariamente si considera dagli Idraulici, converrà far $PS = \frac{2\pi yxdx}{b}$ forza o resistenza prodotta dalla zona Pp (386), e risolverla nelle due forze nor-

FIG. 46.

mali PT, TS, delle quali la TS non concorre affatto al moto per PG ed è anche distrutta da una forza eguale ed opposta nell' altro quadrante ADC. Or poichè i triangoli simili PCG, PST danno $PC\ (b) : PG\ (y) :: PS \left(\frac{2\pi yxdx}{b}\right) : PT$, l' urto o resistenza della zona Pp nella direzione di PG sarà espresso da $PT = dr'' = \frac{2\pi y^2 xdx}{b^2} = 2\pi xdx - \frac{2\pi x^3 dx}{b^2}$ il cui integrale $r'' = \pi x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2b^2}\right) + Cost.$ (L. 1018) darà l' urto contro il segmento FAP. Ora giacchè posta la resistenza $r'' = 0$, svanisce la sfera e si ha $x = 0$ onde $Cost. = 0$, se nell' integrale completo $\pi x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2b^2}\right)$ si faccia $x = b$, l' arco AP diverrà AB e la quantità $\frac{\pi b^2}{2}$ esprimerà l' urto cercato, che è perciò eguale all' urto diretto contro la metà del circolo massimo della sfera (382). Questa quantità $\frac{\pi b^2}{2}$ potrebbe chiamarsi *piano di riduzione* perchè il fluido urtando direttamente in esso v' incontrerebbe la resistenza medesima che incontra urtando nell' emisfero.

388. Ma poichè il fondamento del metodo esposto soffre delle gravi eccezioni (380), cercheremo l' urto d' un globo con un' immediata esperienza. Supposto b il suo raggio, p il suo peso fuor dell' acqua e q il suo peso nell' acqua, si attacchi il globo al Quadrante idrometrico (377) ed in un' acqua di corso placido ed orizzontale (378) si esplori l' angolo o deviazione θ, da cui si ricaverà che il globo riceve dall' acqua una forza $f = q\ tang\ \theta$ (377). Ora la forza dell' acqua contro il circolo massimo πb^2 del globo è $F = \pi b^2 . \frac{c^2}{2g} . \Gamma$ (369) e $\Gamma = \frac{P}{V}$, $P = p - q$ (325), $V = \frac{4b^3\pi}{3}$ (L. 652), onde $\Gamma = \frac{3(p-q)}{4\pi b^3}$; dunque $F = \frac{3c^2(p-q)}{8bg}$; Posta pertanto $\frac{x}{1}$ la ragione delle forze dell' acqua contro il globo

e contro il suo circolo massimo, si avrà $x : 1 :: f : F :: q \tang \theta : \frac{3c^2(p-q)}{8bg}$, onde infine $x = \frac{8bg\, q \tang\theta}{3c^2(p-q)}$, ove c è la celerità dell'acqua che facilmente si può conoscere col galleggiante (378). Così poichè con un' esperienza accuratissima si trovò in misure e pesi di Svezia $2b = 0,17$, $c = 2,086$, $g = 32$, $p = 2397$, $q = 977$, $\theta = 22, 22', 48''$, sarà $Lx = L4 + L2b + Lg + Lq + L \tang \theta - L3 - 2Lc - L(p-q) = 9,6816534 = L0,48046$ onde $x = 0,48046 = \frac{1}{2}$ prossimamente, dimodochè l'esperienza e la teorìa (387) si accordano in questo punto assai bene.

389. Stabilite queste nozioni, potrà facilmente determinarsi il moto orizzontale e verticale dei solidi in mezzo ai fluidi, o di questi in mezzo a quelli. Sia C la celerità iniziale del solido orizzontalmente mosso nel fluido, e poichè la resistenza $r = nac^2\gamma dt$ (381) è una forza che ad ogni istante dt ritarda il moto del solido, sarà $r = Fdt = -pdc$ (34) prendendo il peso p del solido in luogo della massa M a cui è proporzionale (9), e si avrà $-pdc = nac^2\gamma dt$ ovvero $\frac{na\gamma dt}{p} = -\frac{dc}{c^2}$, onde integrando (L. 1018), $\frac{na\gamma t}{p} = \frac{1}{c} + Cost.$: ma nel principio del moto si ha $t = 0$ e $c = C$; dunque $0 = \frac{1}{C} + Cost.$ e $Cost. = \frac{-1}{C}$; perciò l'integrale completo è $\frac{na\gamma t}{p} = \frac{1}{c} - \frac{1}{C}$ e $c = \frac{Cp}{naC\gamma t + p}$.

Di nuovo, poichè $dt = \frac{ds}{c}$ (35), sostituito questo valore nell'equazione $nac^2\gamma dt = -pdc$ verrà $\frac{na\gamma ds}{p} = -\frac{dc}{c}$ ed integrando (L. 1019), $\frac{na\gamma s}{p} = -Lc + Cost.$: ma nel principio del moto lo spazio $s = 0$ e $c = C$; dunque $Cost. = LC$ e l'integrale completo sarà $\frac{na\gamma s}{p} = LC - Lc = L\frac{C}{c}$, e sostituito il valor di c trovato di sopra, $s = \frac{p}{na\gamma} L\left(\frac{naC\gamma t}{p} + 1\right)$.

Dunque richiamando quì il noto numero e il cui logaritmo iperbolico $= 1$, sarà $L\left(\frac{naC\gamma t}{p} + 1\right) = \frac{na\gamma s}{p} = \frac{na\gamma s}{p} Le = Le^{\frac{na\gamma s}{p}}$, e perciò $t = \frac{p}{naC\gamma}\left(e^{\frac{na\gamma s}{p}} - 1\right)$.

390. Quanto al moto verticale all'ingiù, chiamate γ, Γ, P, p le gravità specifiche e i pesi del fluido scacciato e del solido immerso, si avrà $P = \frac{\gamma p}{\Gamma}$ (325) e il peso residuo del solido immerso sarà $q = p - \frac{\gamma p}{\Gamma}$ (326): ma nel tempo di 1'' e nel vuoto si ha la forza di gravità $F = \varphi M$ (40) $= gM$ (44) $= gp$ (389); dunque nel tempo dt e nel fluido sarà $F = gqdt = gdt\left(p - \frac{\gamma p}{\Gamma}\right) = gpdt\left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma}\right)$, e fatto $g\left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma}\right) = h$, avremo $F = hpdt$. Ora le due forze F, r che urtano il solido, essendo insomma due contrarie resistenze e stando perciò tra loro come i quadrati delle celerità del solido (382), chiamata k la celerità relativa alla forza o resistenza $F = hpdt$, avremo $hptd : nac^2\gamma dt :: k^2 : c^2$, e però $k^2 = \frac{hp}{na\gamma}$ ed $nac^2\gamma dt = \frac{hc^2pdt}{k^2} = r$; dunque poichè r si oppone ad F, la forza residua acceleratrice con cui scende il solido, sarà finalmente $F - r = pdc$ (34) cioè $hdt = \frac{k^2dc}{k^2 - c^2}$ ed integrando (L. 1074), $ht = \frac{k}{2} L \frac{k+c}{k-c} + Cost.$: ma nel principio del moto $t = 0$, $c = 0$; dunque $Cost. = 0$ e quindi $t = \frac{k}{2h} L \frac{k+c}{k-c}$.

Di nuovo, giacchè $hdt = \frac{k^2dc}{k^2 - c^2}$ e $dt = \frac{ds}{c}$ (35), verrà $hds = \frac{k^2 cdc}{k^2-c^2}$, ed integrando (L. 1019), $2hs = k^2\,(Cost. - L(k^2-c^2))$; ma nel principio del moto $s=0$, $c=0$; dunque $0 = k^2(Cost. - L\,k^2)$ e $Cost. = Lk^2$, onde l'integrale completo sarà $2hs = k^2\,L\frac{k^2}{k^2-c^2}$, e quindi $s = \frac{k^2}{2h}\,L\frac{k^2}{k^2-c^2}$.

391. Dunque $L\frac{k^2}{k^2-c^2} = \frac{2hs}{k^2} = \frac{2hsLe}{k^2} = Le^{\frac{2hs}{k^2}}$, e perciò $\frac{k^2}{k^2-c^2} = e^{\frac{2hs}{k^2}}$, onde $c = k\sqrt{\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{2hs}{k^2}}}\right)}$, valore che sostituito nell'equazione $t = \frac{k}{2h}\,L\frac{k+c}{k-c}$ (390), dà $t = \frac{k}{2h}\,L\frac{1+\sqrt{(1-e^{\frac{-2hs}{k^2}})}}{1-\sqrt{(1-e^{\frac{-2hs}{k^2}})}}$. E se vogliasi dato per t lo spazio s, sarà $\frac{2ht}{k} = \frac{2htLe}{k} = Le^{\frac{2ht}{k}} = L\frac{1+\sqrt{(1-e^{\frac{-2hs}{k^2}})}}{1-\sqrt{(1-e^{\frac{-2hs}{k^2}})}}$, e perciò $e^{\frac{2ht}{k}} = \frac{1+\sqrt{(1-e^{\frac{-2hs}{k^2}})}}{1-\sqrt{(1-e^{\frac{-2hs}{k^2}})}}$, ovvero togliendo il denominatore e trasponendo, $e^{\frac{2ht}{k}} - 1 = (e^{\frac{2ht}{k}} + 1) \times$

$\sqrt{(1 -$

$\sqrt{(1-e^{\frac{-2hs}{k^2}})}$, cioè $\frac{e^{\frac{2ht}{k}}-1}{e^{\frac{2ht}{k}}+1} = \sqrt{(1-e^{\frac{-2hs}{k^2}})}$ e quadrando, $\frac{(e^{\frac{2ht}{k}}-1)^2}{(e^{\frac{2ht}{k}}+1)^2} = 1 - e^{\frac{-2hs}{k^2}}$; dunque trasponendo i termini e riducendo al medesimo denominatore, $e^{\frac{-2hs}{k^2}} = \frac{4e^{\frac{2ht}{k}}}{(e^{\frac{2ht}{k}}+1)^2}$, ed estraendo la radice quadra, $\frac{1}{e^{\frac{hs}{k^2}}} = \frac{2e^{\frac{ht}{k}}}{e^{\frac{2ht}{k}}+1}$, onde $e^{\frac{hs}{k^2}} = \frac{e^{\frac{2ht}{k}}+1}{2e^{\frac{ht}{k}}} = \frac{e^{\frac{ht}{k}}+e^{\frac{-ht}{k}}}{2}$; dunque restituendo i logaritmi, $\frac{hs}{k^2}\,L\,e = L\frac{e^{\frac{ht}{k}}+e^{\frac{-ht}{k}}}{2}$: e se si osservi che quando il tempo t è solamente di pochi secondi, il numero $e^{\frac{ht}{k}}$ diviene assai considerabile e perciò $e^{\frac{-ht}{k}}$ piccolissimo e assolutamente negligibile, si avrà infine lo spazio $s = \frac{k^2}{h}\,L\frac{e^{\frac{ht}{k}}}{2} = \frac{k^2}{h}(\frac{ht}{k}Le - L2) = kt - \frac{k^2}{h}\,(0{,}6931472)$ (L. 357), ove $\frac{k^2}{h} = \frac{p}{na\gamma}$ (390) $= \frac{\Gamma V}{na\gamma}$.

392. Non ci fermeremo sul moto verticale del solido lanciato all'insù con la celerità iniziale C; forse è troppo quello stesso che abbiamo detto finora: solo osserveremo che le due forze F, r concorrendo ora a distruggere il movimento del solido, la forza totale ritardatrice sarà F + $r = -pdc$ (34) cioè $hdt = \frac{-k^2 dc}{k^2 + c^2}$ (390), formula da cui con l'ordine tenuto di sopra e coi noti metodi d'integrazione (L. 1076) si avrà $c, s e t$;

393. Tali son le leggi del moto dei corpi solidi tra i fluidi o dei fluidi tra i solidi: ma per le cagioni altrove indicate (380), le sole conseguenze primarie (382) si trovano sufficientemente d'accordo con l'esperienza, e perciò sono ormai passate in legge presso gli Idraulici. Quanto alla proporzione delle resistenze nei piani obliqui (384) ella se ne discosta enormemente e sarebbe pericoloso il valersene: la misura stessa del piano di riduzione che col suo soccorso stabilimmo già per la sfera (387) potrebbe stimarsi erronea se non ce ne fossimo in altro modo assicurati (388): Per altro questa diversità tra gli sperimenti e la teorìa si può correggere in gran parte sol che si assegni un adattato valore al numero n che quantunque determinabile nell'urto dei solidi (209), si è quì lasciato apposta indeterminato per applicare alle formule col mezzo di esso la correzione opportuna. L'osservazioni esattissime di Newton e d'altri Fisici rinomati esigono in somma che non si faccia più o $n = 1$ o $n = 2$ sicchè n non esca dai limiti 1, 2, ma che qualunque sia il grado di elasticità nei fluidi, si ponga sempre $n = \frac{1}{2}$: allora nel moto dei piani diretti e della sfera stessa, il consenso della teorìa e dell'esperienza divien quasi maraviglioso. Eccone un esempio.

Cadde da una certa altezza in 8″, 2, un globo di un raggio $b =$ *pie.* 0,195555, la cui vera gravità specifica stava a quella dell'aria come 580 a 23,774: si cerca quest'al-

tezza: Sia ella s e si avrà (391) $Ls = L(kt - \frac{k^2}{h} \times \ldots$ $0{,}6931472)$ e $\frac{k^2}{h} = \frac{\Gamma V}{n a \lambda}$: ma $\Gamma = 580, \gamma = 23{,}774, b = 0{,}195555$, il volume del globo $V = \frac{4\pi b^3}{3}$, il suo circolo massimo πb^2, il suo piano di riduzione $a = \frac{\pi b^2}{2}$ (387), $n = \frac{1}{2}$; dunque

$$\frac{k^2}{h} = \frac{580 \cdot \frac{4\pi b^3}{3}}{\frac{1}{2} \cdot 23{,}774 \cdot \frac{\pi b^2}{2}} = \frac{16 \cdot 580 \cdot 0{,}065185}{23{,}774},$$

e fatto il calcolo coi logaritmi, si troverà $L\frac{k^2}{h} = 1{,}4055934$: ma $h = g\left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma}\right)$ (390) e per Londra, ove fu fatta l'esperienza, $g = 30{,}196$; dunque $h = \frac{30{,}196 \cdot 556{,}226}{580}$, cioè $Lh = 1{,}4617727$; onde $L\frac{k^2}{h} + Lh = Lk^2 = 2{,}8673661$ e $Lk = \frac{Lk^2}{2} = 1{,}4336830$: ma $Lt = 0{,}9138138$; dunque $Lkt = Lk + Lt = 2{,}3474968 = L\,222{,}58$. Ora $L\frac{k^2}{h} = 1{,}4055934$ e $L\,0{,}6931472 = 9{,}8408255$, onde $L\frac{k^2}{h} \times 0{,}69$ ec. $= 1{,}2464189 = L\,17{,}64$; dunque $Ls = L(222{,}58 - 17{,}64)$ ed $s =$ *pie.* 205. Newton misurò quest'altezza e con tenue divario la trovò di *pie.* 206.

Moto dell' acqua nei Condotti.

394. Nella conserva BA si apra un piccolo lume orizzontale o verticale G armato o disarmato (366) e sia b la 40.
sua area, GA $= p$ l'altezza costante dell'acqua nella conserva, t un tempo dato e Q la quantità dell'acqua che esce per G in questo tempo. Essendo costante l'altezza dell'acqua, sarà uniforme il suo moto (367) e la lunghezza della colonna aquea o lo spazio che l'acqua trascorrerebbe sarà

FIG. 40.

$l = s = ct$ (27): ma $p = \frac{c^2}{2g}$ (369) onde $c = \sqrt{2gp}$; dunque $s = t\sqrt{2gp}$ e la quantità dell' acqua $Q = \frac{mbs}{n}$ (366) $= \frac{mbt\sqrt{2gp}}{n}$: ma $g =$ *pie.* 30,2 (68) $=$ *poll.* 362; dunque $Q = \frac{269mbt\sqrt{p}}{10n}$ *poll. cub.* Ora poichè attesa qualche viscosità delle molecule aquee, si trova per esperienza che la quantità dell' acqua per ogni 100 *poll. cub.* dee diminuirsi di $\frac{5}{8}$ di *poll.* in circa, sarà $Q = \frac{269mbt\sqrt{p}}{10n} - \frac{269mbt\sqrt{p}}{1600n} = \frac{42771mbt\sqrt{p}}{1600n}$ *poll. cub.*; onde 1°. se $m = 5$, $n = 8$ (366), avremo $Q = \frac{42771bt\sqrt{p}}{2560}$, e poichè $\frac{42771}{2560} = \frac{267}{16}$ incirca, sarà l' equazione Iª. $Q = \frac{267bt\sqrt{p}}{16}$ *poll. cub.*

395. 2°. Se $m = 13$, $n = 16$ (366), avremo $Q = \frac{556023bt\sqrt{p}}{25600}$, e poichè $\frac{556023}{25600} = \frac{695}{32}$ prossimamente, sarà l' equazione IIª. $Q = \frac{695bt\sqrt{p}}{32}$ *poll. cub.*: e in ambedue l'equazioni t deve essere espresso in secondi come lo è il tempo nel moto uniforme (13), b in pollici quadri e p in pollici lineari come in pollici si è espresso g. Date pertanto tre delle quattro quantità b, p, Q, t, si avrà sempre la quarta: così se nella Iª. equazione sia b un' area circolare del raggio $r =$ *lin.* 8. $=$ *poll.* $\frac{2}{3}$, onde $b = r^2\pi = \frac{4}{9} \times 3{,}142$ (L. 606) $= 1{,}396$, $p =$ *pie.* 11 *poll.* 6 $=$ *poll.* 138 onde $\sqrt{p} = 11{,}7$ e $t = 8' = 480''$, si troverà che per questo lume esce nel dato tempo una quantità d' acqua $Q = 130828$ *poll. cub.*

396. Uniscasi ora al lume G un Condotto inclinato GM

FIG. 40.

di poche tese per formare un *getto d' acqua* MV obliquo o verticale, e determiniamo il diametro di GM onde si ottenga il massimo getto possibile. Sia $b = r^2\pi$ la sezione del condotto GM, $\beta = r'^2\pi$ l' area del getto M, e le loro portate Q, Q' saranno $\frac{mbl}{n}$, $\frac{m\beta\lambda}{n}$ (366) onde $Q : Q' :: bl : \beta\lambda :: r^2 l : r'^2\lambda$. Ora la conserva AB si suppone costantemente piena o in uno stato permanente; dunque (379) $Q = Q'$, $r^2 l = r'^2\lambda$ e però $r^2 : r'^2 :: \lambda : l :: c' : c$ (367): ma l' altezza dell' acqua nella conserva è $MN = p$ (371) e quindi $c' = \sqrt{p}$ (367); dunque $r^2 : r'^2 :: \sqrt{p} : c$ onde $c = \frac{r'^2\sqrt{p}}{r^2}$, e per un altro getto si avrebbe del pari $C = \frac{R'^2\sqrt{P}}{R^2}$. Supposto pertanto che questo secondo getto si sia trovato per esperienza il più vantaggioso di quanti possono aversene con una medesima altezza P e con uno stesso raggio R, affinchè l' altro getto abbia un egual vantaggio dovrà farsi in modo che la celerità c nell' un condotto eguagli la celerità C dell' altro, dal che si avrà $\frac{r'^2\sqrt{p}}{r^2} = \frac{R'^2\sqrt{P}}{R^2}$ ovvero $r = \dots \frac{Rr'}{R'}\sqrt[4]{\frac{p}{P}}$: ma fatto $P =$ *lin.* 467 ed $R =$ *lin.* 6, l' esperienze di Bossut danno $R' =$ *lin.* $1\frac{7}{8}$; dunque poichè $\sqrt[4]{467} = 4{,}65$ incirca, sarà $r = \frac{64r'\sqrt[4]{p}}{93}$ e date o prese ad arbitrio due delle tre quantità p, r, r', si conoscerà subito l' altra: così se $p =$ *lin.* 7488., $r' =$ *lin.* 3, verrà $r =$ *lin.* 19 incirca.

397. Ma qual' è poi l' altezza d' un getto verticale? La teorìa che prescinde da ogni ostacolo farebbe salire il getto fino all' altezza dell' acqua nella conserva (93): ma l' attrito, la resistenza dell' aria e lo scambievole incontro delle molecule aquee diminuiscono talmente questa salita, che secondo gli esperimenti combinati di Mariotte e di Bossut, le differenze tra l' altezza delle conserve e dei getti sono

come i quadrati dell' altezze dei getti. Quindi poste p, p', l' altezze dell' acqua in due conserve ed a, a' l'altezze dei getti, si avrà $p - a : p' - a' :: a^2 : a'^2$, onde $\frac{a^2}{p-a} = \frac{a'^2}{p'-a'}$, e poichè si è trovato che per un getto di *pie.* 5 è necessaria un' altezza d' acqua di *pie.* 5 *poll.* 1, sarà $p' =$ *poll.* 61, $a' =$ *poll.* 60, ed $\frac{a^2}{p-a} = 3600$; dal che si ottiene $a = -1800 + 60\sqrt{(p + 900)}$ *poll.* se p sia dato in pollici, e $p = a + \frac{a^2}{3600}$, ovvero data a in piedi e riducendo a^2 in pollici, $p =$ *pie.* a + *poll.* $\frac{144a^2}{3600} =$ *pie.* a + *poll.* $\frac{(2a)^2}{100}$. Così se $a = 44$, sarà $p =$ *pie.* 44 + *poll.* 77,44 = *pie.* 50 + *poll.* 5,44; e se $p =$ *poll.* 605,44, verrà $a = -1800 + 60.38,8 =$ *poll.* 528 = *pie* 44.

398. Vale tuttociò finchè la lunghezza dei condotti è molto piccola; se ella divenga considerabile con più sinuosità orizzontali e verticali, come ordinariamente succede, si manifesterà talmente l' attrito, che posta l' altezza p dell' acqua nella conserva tra i 3 e i 5 piedi, la lunghezza l del condotto tra le 300 e le 500 tese, e la portata Q senza attrito tra i 30000 e i 50000 pollici cubici, l' esperienza ha fatta trovar la portata con l' attrito presso a poco $Q' = \frac{Ql}{230400}$, onde la formula $Q = \frac{695bt\sqrt{p}}{32}$ (395) da cui si avrebbe $b = \frac{32Q}{695t\sqrt{p}}$, si cangia ora in $Q' = \frac{695blt\sqrt{p}}{7372800} = \frac{139blt\sqrt{p}}{1474560}$. Immaginando pertanto divisa in due parti l' altezza dell' acqua nella conserva, l' una per vincer l' attrito e l' altra per dare da un lume $b \left(= \frac{32Q}{695t\sqrt{p}}\right)$ e per un condotto senza attrito la portata $Q' = \frac{139blt\sqrt{p}}{1474560}$, si dica: se con una certa altezza d' acqua in un condotto senza attrito

la portata Q' esige un lume b, qual lume b' esigerà la portata Q? cioè $\frac{Ql}{230400} : \frac{32Q}{695t\sqrt{p}} :: \frac{695bt\sqrt{p}}{32} : b' = \frac{230400b}{l}$, la quale, espresso b in pollici quadri ed l in lineari, sarà la misura in pollici quadri del lume necessario alla portata Q. Così se Q = 40000 *poll. cub.*, $t = 1' = 60''$, $p =$ *pie.* 4 = *poll.* 48 onde $\sqrt{p} = 6,9$, $b = \frac{32Q}{695t\sqrt{p}} = \frac{32.400}{139.3.6,9}$ ed $l =$ *tes.* 400 = *poll.* 28800, si avrà $b' = \frac{230400.32.400}{139.3.6,9.28800} = \frac{256400}{139.3.6,9} = 35,588$; onde se il lume sia circolare o $b' = \pi r^2$, avremo $r^2 = \frac{35,588}{3,142} = 11,3$ ed $r =$ *poll.* 3,36 in circa. Non si è potuta ottener finora dall' esperienza una formula di Q' più generale di questa, e solo si sa che o cresca la lunghezza del condotto o scemi l' altezza dell' acqua nella conserva, l' attrito aumenta e Q' impiccolisce.

399. Vi è per altro un metodo elegante per calcolar la portata Q' d' un dato condotto, qualunque ne possa esser l' attrito. Giacchè questo ostacolo riduce Q a Q', l'effetto dell'attrito equivarrà ad un ristringimento del lume o al cangiamento di b $(= r^2\pi)$ in β $(= r'^2\pi)$; dunque la celerità dell' acqua nel condotto sarà (396) $c = \frac{r'^2\sqrt{p}}{r^2}$: e siccome la celerità c' $(= \sqrt{p})$ nasce dall' altezza $(\sqrt{p})^2 = p$ (396), così la celerità c $\left(= \frac{r'^2\sqrt{p}}{r^2}\right)$ nascerà dall' altezza $\left(\frac{r'^2\sqrt{p}}{r^2}\right)^2 = \frac{r'^4p}{r^4}$; ma $r > r'$ e però $p > \frac{r'^4p}{r^4}$; dunque l' acqua che ha una forza o celerità corrispondente all' altezza p (367) e sgorga intanto con una forza o celerità corrispondente all' altezza $\frac{r'^4p}{r^4}$, impiegherà necessariamente la forza restante $p - \frac{r'^4p}{r^4}$ contro le pareti del condotto. Perciò se normalmente alla direzion del moto dell' acqua si apra in

queste pareti un piccol foro b', l' acqua si alzerà per esso fino all' altezza $p - \frac{r'^4 p}{r^4}$. Si osservi pertanto la portata q' del piccolo foro in $1'$, si calcoli ancora la portata q che si avrebbe dal foro medesimo in $1'$ se il condotto fosse chiuso e l' acqua avesse l' altezza costante p (395); e poichè (368) $q : q' :: \sqrt{p} : \sqrt{\left(p - \frac{r'^4 p}{r^4}\right)} :: 1 : \sqrt{\left(1 - \frac{r'^4}{r^4}\right)}$, sarà $\frac{r'^2}{r^2} = \frac{\sqrt{(q^2 - q'^2)}}{q}$: ma $Q : Q' :: b : \beta$ (368) $:: r^2 \pi : r'^2 \pi :: r^2 : r'^2$ e $Q = \frac{10425 b \sqrt{p}}{8}$ fatto $t = 1' = 60''$ (395); dunque $Q' = \frac{r'^2 Q}{r^2} = \frac{10425 b \sqrt{(q^2 - q'^2)} p}{8q}$. Così se in un condotto cilindrico sia $r = 1$ onde $b = r^2 \pi = 3{,}142$, $b' = \frac{1}{16} \cdot 3{,}142 = 0{,}196$, $p = pie.\ 3 = poll.\ 36$ onde $\sqrt{p} = 6$, e $t = 1' = 60''$, sarà $q = \frac{267 b' t \sqrt{p}}{16}$ (394) $= 1177$; e se con l' esperienza immediata si trovi per esempio $q' = 1000$, avremo $\frac{r'^2}{r^2} = 0{,}5274$, onde poichè $Q = 24566$, verrà finalmente $Q' = 12956$ *poll. cub.*

400. La forza $p - \frac{r'^4 p}{r^4}$ con cui l' acqua preme le pareti dei condotti (399) serve a fissarne la necessaria grossezza allorchè dovendo formare un getto son quasi interamente chiusi nella loro estremità. Infatti è chiaro che o il fluido sia in quiete nel condotto ad un' altezza $p - \frac{r'^4 p}{r^4}$ o vi si muova con una pressione $p - \frac{r'^4 p}{r^4}$, l' effetto sarà lo stesso e vi vorrà un' egual grossezza per resistere all' uno e all' altro sforzo; dunque la grossezza occorrente in questo secondo caso sarà $g' = \frac{b' \gamma' g t p \,(r^4 - r'^4)}{a b \gamma r^4 t'}$ (317), ove r, r' sono i raggi del condotto e del getto.

401. Non

401. Non è raro che a dispetto di tutti i calcoli e misure opportune, l' effetto dei condotti non ben corrisponda all' espettativa, e si abbia o una portata troppo piccola in modo che una porzione d' acqua non sia ricevuta dal condotto e si versi per lo sfogo del recipiente, o una portata troppo grande in modo che l' acqua della sorgente non basti a somministrare allo sbocco una continuata ed uniforme quantità d' acqua. Si rimedia allora al primo inconveniente col dare al principio del condotto per tre o quattro tese la forma di una tromba la cui parte più larga imbocchi nella conserva; poichè scemando in tal guisa e gli attriti e la contrazion della vena, si aumenterà per l' opposto la celerità e la portata dell' acqua. Il secondo inconveniente si toglie col ristringere a grado a grado le tre o quattro ultime tese del condotto onde si diminuisca il diametro dello sbocco; poichè crescendo col ristringimento gli ostacoli, scemerà necessariamente la celerità dell' acqua e se ne avrà l' efflusso senza intermittenza. Del resto, potendosi veder nei Pratici il metodo dettagliato per la costruzione e collocazione dei condotti, ci contenteremo di accenar quì alcuni dei più essenziali precetti: 1°. avanti di tutto bisogna assicurarsi della possibilità di condur l' acqua da un luogo all' altro riconoscendo con un' esatta livellazione quanto la sorgente sia più alta dello sbocco, e se possa darsi al condotto una pendenza almeno di $\frac{2}{3}$ di linea per tesa: 2°. sarà sempre ben fatto di contare sopra un' altezza d' acqua un poco minore di quella che si ha realmente, poichè se il diametro dei condotti, quale è fissato dal calcolo, riuscisse in pratica alquanto grande, l' acqua si abbasserebbe nella conserva, e avendo riserbata una certa altezza, questo difetto sarebbe tolto da essa senza bisogno d' altri compensi: 3°. nel fissare i luoghi per cui dee passare un condotto e le tortuosità che dee fare, convien ricordarsi che secondo l' esperienze di Bossut, le piegature orizzontali e più ancora le verticali diminuiscono le portate, e che l' unire ad ango-

li acuti o retti i varj pezzi del condotto è un esporlo al pericolo d'aprirsi e un ritardar grandemente il moto dell'acque, mentre all'incontro le curve e gli angoli molto ottusi o nulla o poco pregiudicano al movimento ed al condotto: 4°. i condotti di piombo perchè flessibili, debbon preferirsi a quelli di ferro, di legno, di pietra e di terra cotta, o almeno bisogna sempre addolcire con tubi di piombo le più ardite piegature del condotto totale: 5°. bisogna fabbricar sul condotto di distanza in distanza dei piccoli recipienti che non solo col trattener l'acqua la costringano a deporre le materie eterogenee e a depurarsi, ma anche col deviarla per i loro sfoghi lascin vuoto il condotto inferiore e dian luogo a risarcirlo se occorra: 6°. affinchè nei lunghi e tortuosi condotti l'aria mescolata con l'acqua non si accumuli e non rallenti o impedisca affatto il corso del fluido, debbonsi saldare alle parti più elevate del condotto alcuni *sfiatatoj* o piccoli tubi d'un piede incirca d'altezza con valvule all'estremità, per cui l'aria raccolta possa uscirsene liberamente: 7°. la grossezza dei condotti dee essere alquanto maggiore di quel che insegni la teoria (399) attesi e gli sforzi dell'aria che mai non si sprigiona intieramente, e gli urti dell'acqua contro gli angoli del condotto, e i difetti della materia ond'egli è fatto, e i danni che soffre dall'umidità del terreno adiacente: 8°. come l'acqua porta spesso delle parti pietrose o molto facili e petrificarsi, e queste fortemente attaccandosi alle pareti del condotto, lo ristringono e possono anche giungere ad acciecarlo, è necessario o toglierne il tartaro di tempo in tempo se è possibile, o rinnovare quasi ogni 50 anni il condotto: 9°. se il condotto destinato ad un getto d'acqua abbia un diametro minor di quello che si è fissato di sopra (396) o se il giusto diametro venga ristretto dalle chiavi che ferman l'acqua, il getto non potrà sollevarsi alla sua massima altezza; per l'opposto si guadagnerà sempre qualche cosa in altezza allargando il condotto più di quel che il calcolo lo richieda: 10°. nei getti d'acqua esattamente verticali il fluido ricadendo su quello che sopraggiunge, ne impedisce l'intero innalzamento; perciò i getti un poco obliqui salgono più alto dei verticali: 11°. gli *spilli* in forma di cilindri è di coni danno un getto assai minore del più alto possibile; questo si ottiene per mezzo di una laminetta ben levigata uniforme, di mediocre grossezza, forata normalmente al suo piano e saldata all'estremità del condotto.

Moto dell' acqua nei Fiumi.

402. I fiumi anderebbero al loro sbocco per linea retta se nulla vi si opponesse (14): ma supposto che i sassi, le ghiaje, l'arene ed altre materie eterogenee diano obliquamente un primo indirizzo al filone, egli portandosi con impeto contro una delle due rive e venendone ribattuto, anderà a percuotere inferiormente la riva opposta e con la continuata alternativa dell'incidenze e delle riflessioni, roderà l'una e la farà concava, deporrà dall'altra e la renderà convessa, onde in fine il fiume rettilineo sarà cangiato in tortuoso. Tali tortuosità son talvolta indifferenti, cioè non apportano nè vantaggio nè danno, e allora prescindendo da particolari motivi, sarebbe follia il guastar l'opera della natura con un addirizzamento dispendioso ed equivoco, specialmente finchè il fiume non cessi di correre in ghiaja, nel quale stato non vi è forza alcuna che possa tenerlo in briglia e prevenirne le deviazioni: talvolta senza recar nocumento fanno un vero comodo o per l'irrigazione delle campagne che il fiume serpeggiando attraversa, o per la Navigazione che trova in esso la maggior profondità di cui bisogna, e allora sarebbe anche più stolto il pensiero di addirizzarlo: talvolta poi sono assolutamente dannose o per il ritardo della celerità o per la corrosione degli argini, da cui nasce il rigonfiamento dell'acqua, l'impedimento degli scoli, le rotte e la sommersione dei terreni. Questo è il caso in cui merita discussione il progetto di addirizzare il corso del fiume.

403. Infatti è quello il più certo rimedio di tutti i mali; la maggior brevità della linea aumenta la pendenza e la celerità, le piene si tengon più basse, gli scoli riescon più pronti, la corrosion delle rive è tolta quasi interamente, si acquista molto terreno, e con Canali o *Diversivi* da aprirsi e chiudersi secondo le circostanze può conservarsi l'irrigazione, come con Pescaje o *Sostegni* si conserva la navigazione. Non è per altro sì facile l'*Addirizzamento* d'un fiume. Conviene osservare 1°. di incominciarlo sempre al di sotto dell'ultimo limite delle ghiaje (402), altrimenti la maggior celerità dell'acqua ne prolunga il trasporto (373), il fondo si rialza, gli scoli si difficultano, e le rotte e i cangiamenti di letto divengon quasi inevitabili: 2°. di addirizzare in principio quella prima tortuosità da cui le seguenti hanno origine (402) quand'anche ella fosse nel tronco ghiajoso del fiume, poichè in tal guisa tutte l'altre si mitigheranno o almeno non potranno avanzarsi mentre si rettificano l'inferiori: 3°. di proseguire il lavoro incominciando appunto dall'inferiori e salendo dallo sbocco fino al limite delle ghiaje; l'opposto metodo aumenterebbe nel tronco superiore la celerità dell'acqua che giunta in copia alle più basse tortuosità tuttor sussistenti, vi soffrirebbe un ritardo, si alzerebbe oltre il solito ed inonderebbe il paese: 4°. di cessare da ulteriori addirizzamenti subito che si vedrà che in virtù dei già fatti il pelo del fiume nelle piene più grandi è tanto abbassato da non doversi temere alcun danno dalle tortuosità rimanenti.

404 Non sempre però si potranno togliere con addirizzamenti interrotti le tortuosità dei fiumi, ed attesa la qualità delle terre palustri e poco atte a sostenere il peso dell'arginatura diritta, converrà talvolta intraprendere una *Nuova Inalveazione*, opera difficilissima che esige delle cautele straordinarie: 1°. bisogna idear talmente il lavoro che senza impegnarsi in una spesa esorbitante, si abbia una moral certezza d'una felice riuscita: 2°. bisogna combinare per quanto è possibile il pubblico col privato interesse e

disegnar perciò il nuovo alveo in parte tanto bassa del piano, che gli scoli delle vicine campagne abbiano un pronto ingresso nel fiume: 3°. per salvare gli argini dagli urti e corrosioni dell'acqua, conviene scavarle il terreno affinchè corra ben incassata tra le sue sponde; se il terreno sia facile ad esser corroso, basta scavarne a tutta misura i primi tratti ed accennarne o sbozzarne il restante, mentre l'acqua introdottavi lo perfezionerà da se stessa; in caso opposto, non potendosi sperar soccorso da lei, è forza di scavar l'alveo nell'intere dimensioni che gli convengono, ed allora l'escavazione si incomincia sempre dallo sbocco onde l'acqua delle *sorgive* o polle che per lo più s'incontrano scavando, abbia un pronto scolo e non impedisca la continuazion del lavoro: 4°. se le dimensioni del nuovo alveo non sieno quelle appunto che la natura darebbe al fiume, egli o non vi entrerà o non vi si stabilirà; convien perciò che l'alveo concorra presso a poco col pelo basso o del mare o del fiume a cui fa capo, e verso questo punto il letto dell'influente dee cominciare a salire; la pendenza di cui parleremo tra poco, risulta generalmente dal combinar la forza dell'acqua con la resistenza del terreno e con la qualità delle materie che il fiume trasporta, onde se corre in ghiaja vi vorrà una pendenza maggiore in parità del resto, senza di che non manterrà scavato il suo fondo; insomma nella progettata inalveazione dovrà sempre consultarsi attentamente e prendersi per modello il vecchio fiume: 5°. nemmeno gli argini sono arbitrarj convenendo combinarne la grossezza, l'altezza e la distanza dalle rive con la qualità della terra onde son fatti, col loro avvallamento ordinario, col rialzamento del fondo, col vario stato dell'acque or alte or mediocri, con le straordinarie escrescenze e specialmente con le prime piene che riesciranno maggiori finchè il fiume non abbia dilatato l'alveo e tolto ogni impedimento al suo corso: 6°. se il filone dell'acqua non entri comodamente nel nuovo letto, bisognerà moltiplicarne le bocche, poichè le molte vie faciliteranno l'ingresso; per la stessa ragione dovranno moltiplicarsi gli sbocchi nel mare allorchè o il suo poco fondo darebbe adito al fiume di prolungarsi la linea (373) o i venti gagliardi e l'opposto moto dei flutti rispingerebbero l'acqua e ne impedirebbero il pronto scarico: 7°. la strana ed incostante natura dei torrenti oltre a queste regole esige ancora che si dia la minima larghezza possibile al fondo del nuovo alveo e la massima possibile inclinazione e dilatazione alle rive ed agli argini; in tal guisa lo scavo riuscirà sempre proporzionato alle grandi e piccole piene, e l'acqua ne' suoi stati diversi avrà tanta altezza, pressione e celerità da mantener libero ed espurgato il suo fondo.

405. Ma una nuova inalveazione dee riguardarsi come un rimedio dei soli casi estremi e disperati, e finchè il miglioramento e la rettificazione del vecchio letto potranno aver luogo, non dovrà pensarsi a cangiarlo. Molto più sarà pericolosa l'impresa se l'inalveazione non abbia solamente in mira l'addirizzamento d'un fiume, ma anche la *riunione di molti fiumi* in un medesimo recipiente. La diversissima indole dei fiumi che spesso discordan tra loro non solo nella quantità dell'acqua e nella qualità delle materie che portano, ma anche nella situazion del fondo, nella natura del terreno, e nella varia combinazion delle piene, fa che i precetti in questo proposito sieno pochissimi e pieni di eccezioni: 1°. la riunione dei torrenti è per lo più d'una riuscita infelice; l'inegual distanza delle loro origini, e la diversità e successione dei temporali e delle pioggie, gli obbligano a portare al comun tronco le loro piene in tempi assai differenti, onde ciascuna incontrandosi solitaria in un alveo più largo del suo bisogno, vi deposita, lo riempie e ben presto ne deteriora il sistema: 2°. se i fiumi influenti portan tutti una materia omogenea o successivamente men grave di quella del recipiente, ed hanno almen per la maggior parte le piene contemporanee, potrà farsene la riunione, poichè tutti insieme si formeranno in breve un alveo conveniente, e le piene unite dei più cor-

reggeranno il male che avran prodotto i ringorghi e le deposizioni degli altri; in caso diverso è manifesto che il letto comune non potrà mai avere stabilità: 3°. talvolta però la riunione fa cangiar natura ai fiumi riuniti, e se il fondo d'un influente nel punto d'incontro sia molto più alto o più basso del fondo del recipiente, l'acqua abbassandolo nel primo caso ed innalzandolo nel secondo acquisterà o perderà pendenza nel tronco di sopra e potrà o spingere fino al comun letto le ghiaje che prima abbandonava per via, o interrire il proprio alveo; allora se non siavi altro punto più adattato alla confluenza, converrà sostenere allo sbocco il fondo dell'influente più alto per mezzo d'una o più *chiuse* o peseaje, ovvero con un adeguato ristringimento di rive procurargli una maggior celerità se è più basso: 4°. quando poi le materie portate dei fiumi influenti son più gravi di quelle del principale, nè vi sarà maniera di prolungar con qualche tortuosità il corso degli influenti onde prima di unirsi depongano le loro ghiaje, si comincierà dal riunir l'inferiore e se ne osserveranno gli effetti che non riuscendo dannosi, daranno luogo ad inalveare il seguente, e con la stessa cautela si intraprenderà successivamente la riunione degli altri; ma si avrà per limite oltre cui non dee procedersi, il più piccolo danno che risulti dall'ultima inalveazione, quale sarebbe un'insolita corrosione di rive, un cangiamento di corso, un'elevazion di fondo ec.: 5°. la concorrenza dei fiumi dee farsi in direzioni quasi parallele o ad angoli molto acuti, onde senza contrasto d'acque e ritardo di moto proseguano liberamente il lor cammino: 6°. allorchè verificate le condizioni ed eseguite le regole fin quì esposte, possa sperarsi una felice riunione, non vi sarà bisogno che la larghezza del recipiente eguagli la somma delle larghezze degli influenti affinchè l'acqua riunita non si alzi di troppo; anzi è certo che potendo la celerità delle nuove acque aumentarsi talvolta in maggior ragione della lor quantità, vi son dei casi in cui la riunion di più fiumi fa sgonfiar quel primo in cui si gettano, tanto più che la maggior copia d'acque scava maggiormente il fondo, vi incontra una minor resistenza, mette in moto le molecule inerti più vicine alle rive, e sgombrati gli impedimenti, si facilita il corso e lo scarico.

406. E quì meritano delle particolari avvertenze i *Canali* che dalle campagne, dalle paludi, dai laghi e da altri corpi d'acqua stagnanti si conducono ai fiumi ò dai fiumi si derivano per varj fini ad altri punti inferiori. Ordinariamente per impedir le corrosioni si munisce l'imboccatura e lo sbocco di questi canali con muro a calcina la cui figura suol essere parallelepipeda: ora per poco che si osservino le naturali aperture che l'acqua di proprio istinto si accomoda, si vedrà che la figura ne è molto diversa. Ben lungi dal serrarsi il passaggio con angoli prominenti e vivi, ella se lo dilata rodendo i risalti e le punte e dando all'una e all'altra riva la forma d'una curva convessa che molto si accosta alla parabola o al largo della tromba di cui parlammo di sopra (401); in tal guisa evita in gran parte gli effetti della contrazion della vena, non produce caduta, non corre in direzione obliqua e convergente, non perde celerità, e relativamente alle dimensioni del canale, si procura il massimo scarico. Poichè dunque è regola generale d'Idraulica di secondar la natura le cui leggi sono inviolabili, non dovrà lasciarsi al capriccio di un artefice imperito il costruir l'imboccature e gli sbocchi dei canali, le porte dei sostegni, le pile dei ponti ec., ma converrà proporzionargli al modello che l'acqua libera tutto dì ci presenta.

407. Or cominciando dai *Canali di scolo*, 1°. in parità di circostanze dee prescergliersi per gli scoli il canal rettilineo; è però certo che la natura ne indica per lo più l'andamento e segna da se stessa la strada all'acqua, nè sarà buon consiglio abbandonarla: 2°. gli scoli più felici e più pronti si hanno in quei terreni che son più alti della massima altezza del fiume in piena, poichè in tal caso non vi è mai ostacolo al corso dell'acqua; perciò se questo vantaggio d'altezza possa ottenersi con prolungare il canale fino al mare vicino, ben s'intende che lo scolo in mare dovrà preferirsi a qualunque punto d'un fiume: 3°. ma se convenga valersi del fiume, dovranno i terreni essere almen più alti o del fondo di esso quando sia temporaneo, o del suo pelo basso se sia perenne, affinchè cessata l'acqua o la piena si dia luogo allo scolo: 4°. intanto durante la piena o l'acqua, bisognerà con cateratte o altre simili macchine vietare al fiume l'ingresso nel canale di scolo che senza ciò sarebbe interrito, e dare al canale tanta larghezza quanta può occorrergli perchè unitamente ai fossi secondarj contenga presso a poco tutta la pioggia che d'ordinario suol cadere mentre la cateratta è chiusa; ciò esige un calcolo i cui elementi sono l'ordinaria durata delle piene, la quantità del terreno che scola, e la quantità della pioggia che può cadere in una volta, la quale in Toscana può stimarsi la massima quando giunge a *poll.* $3\frac{1}{2}$ d'altezza; in ogn'altro caso si daranno al canale le dimensioni di maggior risparmio: 5°. non si uniranno insieme gli scoli dei più alti e dei più bassi terreni, poichè l'asciugamento degli uni cagionerebbe l'allagamento degli altri; e se i due diversi scoli si impedissero scambievolmente intersecandosi, converrà condur l'uno al di sopra o al di sotto dell'altro per mezzo d'un *ponte-canale*, o d'un canale o *botte sotterranea*, secondo la varia pendenza di quello e di questo: 6°. giacchè per la poca pendenza dei fossi particolari, può averne ordinariamente assai poca il canal di scolo onde è molto piccola la celerità delle sue acque, bisognerà rimuovere ogni minima cagion di ritardo col riparare agli smottamenti delle rive e degli argini se vi sieno, coll'espurgare il fondo dai ridossi, interrimenti e piante aquatiche, e con invigilare contro le ture ed incannicciate dei pescatori e contro i passatoj che vi gettano i Contadini per attraversar con prontezza le lor campagne: 7°. la piccola celerità degli scoli impedisce ancora di riunirne molti insieme, non solo perchè l'acqua lentamente movendosi si alzerebbe assai con pregiudizio dei fossi vi-

cini, ma anche perchè mancando di forza per profondarsi l'alveo, vi si farebbero delle straordinarie deposizioni, e col nuovo rialzamento del pelo crescerebbe il male delle campagne: 8°. infine allorchè il terreno per la sua natural bassezza ricusa ogni scolo, dovrà risanarsi con le Colmate cioè col forzar l'acque torbide a depositarvi la loro terra e a rialzarlo.

408. Ma le Colmate come anche i Canali Navigabili suppongono un *Diversivo* cioè un Canale che parte da un fiume e lo spoglia d'una porzione delle sue acque. Ora come gli antichi Idraulici lodarono molto i diversivi qual rimedio sicuro contro le inondazioni imminenti, così i più tra i moderni gli hanno messi in un intero discredito come cagioni di quegli stessi trabocchi che voleansi per loro mezzo evitare. Infatti poichè si è visto di sopra (405) che il maggior numero degli influenti può talora diminuir l'altezza del fiume principale, è ben chiaro che un diversivo potrà piuttosto aumentarla; ed è passato quasi in generale assioma che la celerità dell'acque segue prossimamente la ragione delle lor quantità almeno fino ad un certo limite, cosicchè l'altezze restano presso a poco le stesse o si uniscano i fiumi o si dividano. Per altro se i diversivi posson riuscire in una gran piena inutili e fors'anche dannosi, servon per l'opposto sì bene al Commercio ed all'Agricoltura che niun Popolo industrioso ha lasciato di profittarne o per il trasporto dei generi o per la fecondità dei terreni.

409. Quanto ai Canali Navigabili o *Navigli*, 1°. se il fiume corra tra gli argini, il taglio dell'argine fin sotto al pelo basso del fiume dovrà munirsi di muro onde non sia corroso, e piegarsi il muro nella figura altrove accennata (406); negli incastri di questo muro può applicarsi una cateratta che regoli l'introduzione dell'acqua a misura dell'occorrenze: 2°. se il fiume corre incassato, si attraversi il suo alveo con una pescaja che sollevi il pelo dell'acqua e la inviti a passar nel canale; e poichè l'inevitabile effetto delle pescaje è di rialzare il fondo nel tronco superiore, il

che le seppellisce infine tra le deposizioni e le rende infruttuose, converrà stabilir la soglia dell'emissario molto più in alto del fondo attuale del fiume e portar poi l'altezza della pescaja a tanti piedi di più sopra la soglia quanti sono i piedi d'acqua che voglion derivarsi dal fiume: 3°. se il fiume corre in ghiaja si fabbrichino lungo il canale a varie distanze e specialmente presso all'emissario delle chiaviche o *paraporti* con cateratta, i quali abbiano la soglia più bassa del fondo del canale; questi si aprono nell'escrescenze, e l'acqua accorrendovi in copia, sempre più determina il filone verso il diversivo, espurga la soglia dell'emissario, scava il fondo tra i paraporti, e rende al tronco inferiore del fiume tutte le deposizioni che il canale avea raccolte dal superiore: 4°. si faranno nel canale a fior d'acqua degli sfogatoj che in occasione di piena riportino al fiume l'acqua superflua introdottasi nel canale: 5°. la pendenza di esso perchè le barche possano comodamente risalirlo, non dovrà eccedere i 2 piedi incirca per miglio; la sua larghezza per evitare gli interrimenti dovrà essere la minima possibile, tale cioè che due barche di fronte non si impediscano il passo; e converrà regolarne la profondità sulla figura delle barche e sul massimo carico che posson ricevere, usando se occorra i sostegni o cateratte artificiali che trattengon l'acqua e la obbligano ad alzarsi fino al segno conveniente.

410. Quanto poi alle *Colmate* che il continuo rialzamento degli alvei (373) rende di giorno in giorno più necessarie nella pianura, 1°. supposta la vicinanza d'un fiume o torrente sotto il limite delle ghiaje, si livelli e si divida in più parti il terreno che vuol colmarsi se sia molto grande, e ciascuna parte si cinga d'argini proporzionati al corpo dell'acqua che debbono contenere, con aperture per cui tutti i recinti comunichino liberamente tra loro; e se la terra è scarsa nè somministra assai di materia per gli argini, si formeranno essi in principio con macchie di vetrici che fortificate da palizzate e da zolle, riteranno l'ac-

qua alla meglio finchè giunga tanta terra in colmata da costruirgli regolarmente: 2°. si aprano due canali proporzionatamente arginati, il primo dal fiume alla colmata diviso in varj rami che portin l'acqua ai fondi più remoti del terreno, il secondo dalla colmata ad un tronco inferiore del fiume o ad altro recipiente che riceva lo scolo dell'acque dopo che avranno depositata la torba; che se manchi il luogo a questo scolo, cessata la piena e rialzato alquanto il terreno, converrà rimetter nel fiume l'acque chiare della colmata per lo stesso primo diversivo per cui vi vennero, e allora il terreno si colmerà più lentamente: 3°. all'ingresso del canale di scolo si faccia in luogo d'argine uno steccato con palizzate e fascine, la cui altezza dovrà poi aumentarsi a misura che si alza il terreno: 4°. si munisca con chiavica e cateratta il taglio da farsi all'argine o sponda del fiume, e se il rialzamento del terreno debba esser considerabile, si ponga la soglia della chiavica nel fondo stesso del fiume onde passino in colmata anche l'arene più grosse, a cui però si negherà l'ingresso con rialzar la soglia dacchè le deposizioni saranno giunte ove dee cominciar la terra fertile ed il buon fondo. E' chiaro che disposte in tal guisa le cose, se al venir d'una piena si apra la cateratta, l'acque torbide s'introdurranno nei rami del diversivo e passando continuamente per l'aperture di comunicazione, si alzeranno in tutti i recinti fino alla cima dello steccato da cui non comincieranno a traboccare che dopo essersi riposate o almeno ritardate molto tra gli argini e avervi perciò deposta la più gran parte della materia che portano. Ma poichè questa materia si posa sul terreno tumultuariamente e lascia gran vuoti onde poi s'abbassa e scomparisce, converrà replicar tante volte l'operazione e portar la colmata tant'alto che ridotta una volta a cultura sia capace d'uno scolo felice; perciò i rami del diversivo dovranno spesso scavarsi affinchè ricevano l'acqua in abbondanza e la conducano alle parti della colmata più lontane dal fiume e più basse di fondo.

411. Premessi questi compendiosi precetti sul modo di evitare i danni dei fiumi e di ritrarne ogni possibil vantaggio, daremo ora le regole comunemente prescritte per averne le portate e le dimensioni. Sogliono distinguersi i fiumi in *liberi* ed *impediti*: son liberi allorchè non incontran per via forza alcuna valutabile che ritardi quel moto a cui l'acqua è naturalmente determinata o dalla pressione delle molecule superiori se il fiume corra orizzontale, o dalla pendenza dell'alveo se il fiume corra inclinato; e sono impediti allorchè una o più cagioni ne alterano in qualche modo il natural movimento: così l'asprezza delle rive e del fondo, la diminuzione della pendenza, le tortuosità, gli allargamenti, le pescaje, gli ammassi di pietre e d'arene ec. son cagioni ritardatrici che impediscono i fiumi rallentandone il corso contro natura. Or poichè non vi è forse alcun fiume in cui non concorrano molte insieme di queste esterne cagioni, la distinzione riescirebbe inutile per i fiumi del nostro Globo se le particolari circostanze non autorizzassero alle volte a riguardargli come affatto liberi o non sensibilmente impediti.

412. In primo luogo gli ostacoli permanenti ed uniformi che agiscono per tutto il fiume equabilmente, se lo privano dell'assoluta libertà gli lasciano almeno una libertà relativa per cui corra con celerità proporzionale a quella che tolto ogni ostacolo gli converrebbe; e purchè un fiume in qualche modo sia libero, non lascerà di esser soggetto alle regole che si soglion prescrivere per questo caso. In secondo luogo può rendersi libero per arte qualche fiume che non lo è per natura, fingendone ristretta la sezione dentro tutti gli impedimenti delle rive e del fondo, e trascurando quell'acqua che o ristagna o lentamente scorre di là da questi limiti: la sua quantità può con sicurezza aversi per nulla, specialmente se si consideri che il contare sopra una portata d'acqua minore alquanto del giusto non cagiona per l'ordinario alcun pregiudizio (405. 408), mentre all'opposto i più dannosi errori dei Pratici nascono assai spesso dall'

FIG. aver rilevata dal calcolo una portata che supera di gran lunga la vera, ond' è che a scanso di tali errori fanno uso piuttosto delle portate proporzionali e relative che dell' assolute e reali. Infine si osserva con maraviglia che gli antichi Idraulici nel fondare una teorìa ebbero in vista i soli fiumi liberi, che l' applicarono quasi indistintamente ai fiumi di qualunque corso, e che le loro grandiose operazioni idrometriche riuscirono il più delle volte con fortunato successo: ciò ci induce a sospettare che forse vien trascurato nella teorìa qualche elemento che ne compensa in molti casi il difetto, e per cui le dottrine sui fiumi liberi posson trasportarsi senza pericolo ai fiumi impediti. Comunque siasi, ecco quanto può dirsi sugli uni e sugli altri.

47. 413 Se la sezione AC d' un fiume libero si concepisca chiusa con un piano verticale, e quindi si aprano in esso infiniti piccolissimi lumi, è manifesto che l' acqua uscirà da ciascun di essi, cioè da tutta la sezione, come dal recipiente già considerato di sopra (367), e avrà luogo anche quì la parabola dell' equazione $S^2 = 4ps$ (370), ove $S = AM$, $S = BE$ ec. rappresentano la celerità dell' acqua nei punti A, B ec., $s = AD$, $s = BD$ ec. sono l' altezze di essa sopra i medesimi punti A, B ec., e $4p$ è il parametro della curva. Per determinar questo parametro, sia $S = AM = c$ la celerità dell' acqua nella sua superficie AN o lo spazio che ella trascorre nel tempo $T = 1''$ (22), e chiamisi $s = AD$ l' altezza dovuta a quella celerità o spazio S: si avrà dunque $s = \frac{c^2}{2g}$ (70) $= \frac{S^2}{2g}$, onde $S^2 = 4ps = 2gs$ e $4p = 2g =$ *pie.* 60, 4 (68).

414. Trovata pertanto col solito galleggiante (378) la celerità superficiale c dell' acqua, si avrà $\frac{c^2}{2g} = AD$ per l' altezza a lei dovuta (70); onde posta $a = AB$ l' altezza o profondità dell' acqua nel fiume, sarà l' ascissa $s = BD = a + \frac{c^2}{2g}$, $S^2 = 4p\left(\frac{2ag + c^2}{2g}\right) = 2ag + c^2$ (413) e la somma

delle molecule effluenti per la linea o strato DB verrebbe espressa delle infinite colonne fluide o celerità (367) o ordinate (413) della parabola, cioè dalla parabola stessa $DEB = \frac{2Ss}{3}$ (L. 930) $= \frac{1}{3g} \sqrt{(2ag + c^2)^3}$: ma per tutta l' altezza AD non vi è acqua e perciò manca tutta la parabola $DMA = \frac{2AM \cdot AD}{3} = \frac{2c.c^2}{3.2g} = \frac{c^3}{3g}$; dunque le molecule effluenti si riducono all' area $DEB - DMA = \frac{1}{3g}\left[\sqrt{(2ag + c^2)^3} - c^3\right]$. Moltiplicando pertanto questo strato d' acqua per la larghezza $AN = l$ d' una sezione viva e rettangolare AC, la portata Q d' acqua che si ha da lei in $1''$ sarà finalmente $Q = \frac{l}{3g}\left[\sqrt{(2ag + c^2)^3} - c^3\right] = \frac{sl}{453}\left[\sqrt{\left(\frac{302a}{5} + c^2\right)^3} - c^3\right]$. FIG. 47.

415. Tanto basterebbe per la misura dell' acque correnti se le loro sezioni fossero rettangolari; e con questa regola infatti si calcola l' *oncia* o *pollice d' acqua* che è un emissario rettangolare $AC = la$, le cui dimensioni $BC = l$, $BA = a$, come pure il *battente* $AD = b = \frac{c^2}{2g}$ (414) cioè l' altezza b a cui dee l' acqua costantemente alzarsi sopra il rettangolo AC, son fissate dalle particolari Leggi di ciascun Paese. Ma poichè rare volte s' incontrano nei fiumi delle sezioni rettangolari, e sembra poco esatto il metodo di alcuni Idrometri che le misurano al solito (375) e tutte poi le riducono ad un rettangolo la cui larghezza è la larghezza stessa del fiume (L. 603), l' uso ha stabilito che si iscriva in esse il massimo possibil rettangolo, e si divida il rimanente spazio in triangoli con un lato qualunque parallelo alla superficie o livello AN. Sia BHG uno di questi triangoli la cui base $HG = b$, la distanza dalla totale altezza dell' acqua o $ZD = i$, la normale sulla base o $BZ = n$, un' ascissa $BL = x$, la sua differenziale $LK = dx$, e condotte LO, KF parallele a ZG o AN, si avrà ZB (n) : BL (x) ::

FIG.

47. HB : BX : : HG (b) : XO $= \frac{bx}{n}$. Ora poichè $S^2 = 4ps$ (413), se si prenda l' ascissa $s =$ DL $= i + n - x$, la lunghezza della colonna fluida ovvero (366. 367) la celerità dell' acqua in L sarà $S = 2p^{\frac{1}{2}} \sqrt{(i + n - x)}$: ma la quantità dell' acqua effluente risulta dal prodotto della base o area della colonna fluida per la sua lunghezza o celerità (366); dunque l' infinitesima quantità dq d' acqua che in 1'' si scarica per l' area XOFV ($= \frac{bxdx}{n}$ perchè attesa la sua piccolezza può riguardarsi come rettangolare) sarà $dq = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}xdx}{n} \times \sqrt{(i + n - x)}$ ove fatto $i + n - x = z$, verrà (L. 1022) $dq = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \times z^{\frac{1}{2}} dz (z - i - n)$, ed integrando, $q = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \times \left(\frac{2z^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2(i + n)z^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + Cost. = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \left(\frac{2(i + n - x)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2(i + n)(i + n - x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + Cost.$: ma fatto $x = 0$ svanisce anche q; dunque $Cost. = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n}\left(\frac{2(i + n)^{\frac{5}{2}}}{3} - \frac{2(i + n)^{\frac{5}{2}}}{5}\right) = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} . \frac{4(i + n)^{\frac{5}{2}}}{15}$, e però posto $x = n$ e $p = \frac{g}{2} = 15,1$ (413), tutta l' acqua che passerà per il triangolo BHG sarà $q = \frac{259b}{250n} [2\sqrt{(i + n)^5} - (5n + 2i)\sqrt{i^3}]$.

416. Quando il triangolo abbia il vertice all' insù come IHG, si farà QI $= i$, IP $= x$ e ritenute tutte l' altre denominazioni di sopra, si avrà col raziocinio medesimo, $dq =$

$\frac{2bp^{\frac{1}{2}}xdx}{n}$

$\frac{2bp^{\frac{1}{2}}xdx}{n} \sqrt{(i + x)}$, e posto $i + x = z$, verrà $dq = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n} \times z^{\frac{1}{2}} dz (z - i)$, ed integrando, $q = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n}\left(\frac{2z^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2iz^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + Cost. = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n}\left(\frac{2(i + x)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2i(i + x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + Cost.$; e $Cost. = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{n}\left(\frac{2i^{\frac{5}{2}}}{3} - \frac{2i^{\frac{5}{2}}}{5}\right) = \frac{2bp^{\frac{1}{2}}}{15n} \times 4i^{\frac{5}{2}}$, onde infine fatto $x = n$, e $p = 15,1$, avremo $q = \frac{259b}{250n} [2\sqrt{i^5} + (3n - 2i)\sqrt{(i + n)^3}]$. E' inutile di avvertire che se si avesse un triangolo come IGB, basterebbe condur GH parallela ad AN, ed il calcolo dei due triangoli IGH, BGH darebbe 47. quello dell' intero triangolo IGB: osserveremo piuttosto che in tutte le formule fin quì trovate le quantità a, b, c, i, l, n debbono esprimersi in piedi, come in piedi si espresse g (413).

417. Così le proprietà della parabola offrirono agli Idrometri la soluzione del fondamental problema sulla portata dei fiumi liberi. L' altro problema egualmente importante sulla giusta pendenza da assegnarsi ai loro letti onde sieno stabili, ed il concorso di nuovi influenti non gli incavi o gli rialzi, fu sciolto in parte per teorla ed in parte per osservazione, e si decise che *se nel punto della confluenza tanto gli influenti quanto il recipiente abbiano materie prossimamente simili ed omogenee, le pendenze debbona essere in ragione inversa delle portate*: di modo che se sia q la portata del recipiente prima della confluenza, Q la portata del recipiente e dell' influente insieme, e DE la pendenza del recipiente in un miglio, quella di am- 41. bedue nel tratto stesso d' un miglio sarà KC $= \frac{q . \text{DE}}{\text{Q}}$.

418. Contro questa formula potrebbe dirsi che se sia

FIG. 41. $q = Q$, si avrà sempre $KC = DE$, cioè se un fiume conservi inalterabile il suo corpo d' acqua, esigerà dovunque una costante pendenza, il che ripugna alle osservazioni (373). Ma son ben rari quei fiumi che non ricevano alcun influente come quì si suppone, e quando pur vene fossero, è da avvertire che la portata q in un tronco superiore del fiume è un misto molto eterogeneo d' acqua, di sassi, di ghiaje, d' arene e di terra, mentre la portata Q nel tronco inferiore sempre più si avvicina alla pura acqua, deponendo i fiumi per via le più grosse materie, e riducendosi infine a strascinar poca terra con sottilissima arena. Non esprimendo dunque Q, q le portate assolute dei due tronchi ma le quantità relative dell' acqua, le quali facilmente si ottengono prendendo una stessa misura delle due acque, e calcolando la vera quantità d' acqua che ciascuna contiene, si troverà sempre $Q > q$ e però $KC < DE$. Ed ecco perchè nella costruzion della formula abbiam supposte omogenee le materie del recipiente e degli influenti, oltre il precetto già dato altrove (405) di non riunir mai quei fiumi le cui materie son più gravi di quelle del recipiente.

419. Sull' altezza e larghezza dovute all' alveo d' un fiume non hanno gli Idrometri pronunziato per anche con precisione, benchè sia questo un problema non meno interessante degli altri due. Si sa di certo che i fiumi sotto le medesime dimensioni son capaci di portate estremamente diverse (405) e tanto basta perchè dalle portate non si possano inferir le dimensioni: si sa del pari che le varie sezioni d' un medesimo fiume, attesa principalmente la differente natura dei terreni che attraversa, ora son più profonde e men larghe, ed ora più larghe e men profonde, il che rovescia qualunque legge costante di larghezza o profondità e qualunque analogia volesse stabilirsi tra questa e quella. Nondimeno osservandosi che in terreni suscettibili di corrosione il fiume si forma da se medesimo un canale nelle vesione il fiume si forma da se medesimo un canale nelle vere misure che gli convengono (404), è passato per principio che gli alvei sufficientemente profondati debbon tenersi

FIG. piuttosto ristretti, e che si dee cautamente abbondare nella distanza degli argini dalle rive, onde l' acqua in caso di escrescenze possa allargarsi liberamente, e non graviti troppo contro gli stessi argini, e deponendo le torbe tra gli argini e le rive resti sempre meglio incassata. Del rimanente i molti esempj di lavori felicemente eseguiti saranno la miglior regola di tutti quelli che si vorranno eseguire, e un prudente Idrometra non si accingerà ad un' opera senza esempio se la palese volontà di chi può avervi un immediato interesse non gli offra fortunatamente il comodo d' una pericolosa esperienza.

420. Applicazioni. I. in un fondo assai regolare d' un fiume in piena la cui celerità superficiale era di 3 miglia l' ora, fu presa la sezione GLKMF non alterata da svolte, 42.
non soggetta a ringorghi, non vicina a rotte, in breve libera e viva (374), che si trovò risolubile in un massimo rettangolo NM, in due triangoli GNL, FBM con la base alla superficie, e in un terzo triangolo LKM sottoposto al rettangolo: era $NB = LM =$ *pie.* 30, $GN =$ *pie.* 10, $FB =$ *pie.* 18, $AK =$ *pie.* 15,7, $AP = NL = BM =$ *pie.* 12, onde $PK =$ 3,7. Qual' è la portata di questo fiume?

Presa (414) la formula $Q = \frac{5l}{453}\left[\sqrt{\left(\frac{302a}{5} + c^2\right)^3} - c^3\right]$, osservo che trattandosi ivi della portata in 1″, dee cercarsi la celerità c per 1″, onde poichè 3 miglia sono *pie.* 15000, un' ora è 3600″ e 3600″ : 15000 :: 1″ : 4,17, avremo $c = 4,17$, $a = 12$, $l = 30$, $\frac{302a}{5} + c^2 = 742,19$; $\sqrt{\left(\frac{302a}{5} + c^2\right)^3} = 20219,6$, da cui sottraendo $c^3 = 72,51$, verrà $Q = \frac{150.20147,09}{453} =$ 6671,22 piedi cubici d' acqua somministrati dal rettangolo NM.

Quanto ai due triangoli GLN, FMB che hanno la stessa altezza, gli riunisco in un solo e presa (415) la conveniente

FIG.

formula $q = \frac{259b}{250n} [2\sqrt{(i+n)^5} - (5n+2i)\sqrt{i^3}]$, avverto che i non comprende la sola distanza dalla base al livello, che quì sarebbe zero giacchè i triangoli hanno la base alla superficie dell' acqua, ma anche l' altezza $\frac{c^2}{2g} = \ldots \frac{17,39}{60,4} = 0,29$ dovuta alla celerità superficiale (414); onde si avrà $b = GN + FB = 28$, $n = LN = MB = 12$, $i = 0,$
2. 29, $i + n = 12,29$; $2\sqrt{(i+n)^5} = 1059,03$ da cui sottraendo $(5n+2i)\sqrt{i^3} = 9,46$, verrà $q = \frac{259.28 \;.\; 1049,57}{250 \;.\; 12} = 2537,16$ piedi cubici somministrati dai triangoli GLN, FMB.

Calcolando finalmente con la stessa formula il triangolo LKM, sarà $b = LM = 30$, $n = KP = 3,7$, $i = PA + 0,29 = 12,29$, $i + n = 16$, $2\sqrt{(i+n)^5} = 2048$, da cui sottraendo $(5n+2i)\sqrt{i^3} = 1852$ in circa, verrà $q = \frac{259.30.196}{250.3.7} = 1646$ piedi cubici d' acqua somministrati dal triangolo LKM. Dunque la portata totale del fiume è di 10854 piedi cubici d' acqua in 1''.

421. II. Supponghiamo ora che in questo fiume voglia
47. aprirsi di fianco un Diversivo con un emissario rettangolare AC la cui larghezza $AN =$ *pie.* 12 e l' altezza $BA = 15,7$. Qual sarà la portata d' un tal Canale?

Avremo dunque (414) $l = 12$, $a = 15,7$, $c = 4,17$; $\frac{302a}{5} + c^2 = 965,67$; $\sqrt{\left(\frac{302a}{5} + c^2\right)^3} = 30008,4$ da cui sottraendo $c^3 = 72,51$, verrà $Q = \frac{60.29935,89}{453} = 3965$, e tale sarebbe la portata teorica se lo sbocco fosse libero: ma poichè la bocca è di fianco e almeno in questo caso convien valutare la contrazion della vena che gli Idrometri ordinariamente trascurano, bisognerà supporre x la portata effettiva e far l' analogìa (366) $x : 3965 :: 5 : 8$ che dà $x = 2478$ piedi cubici d' acqua somministrati dall' emissario in 1''.

FIG.

422. III. Vogliasi infine aprire un alveo ove debban concorrere a varj intervalli tre fiumi omogenei le cui portate in piedi cubici sono 10854, 4300, 7259. Supposto che l' attual pendenza del primo sia di *pie.* 1,5 per miglio, quali saranno la larghezza, e la profondità e la pendenza del nuovo alveo?

E' chiaro che se il primo fiume corra felicemente nella pendenza e dimensioni attuali, non vi sarà luogo a cangiamento per tutto il tratto del nuovo alveo fino all' incontro del secondo influente, se pur non avvenga che il primo lasci presto i sassi e le ghiaje, nel qual caso fin dal punto estremo della deposizione potrebbe cominciarsi a diminuirne la pendenza (418). Ma posto che ella resti costante in questo tronco, al concorso del secondo influente sarà $q = 10854$, $DE = 1,5$, $Q = 15154$, onde (417) $KC =$ 41.
$\frac{10854.1,5}{15154} = 1,07$, e al concorso del terzo influente sarà $q = 15154$, $DE = 1,07$, $Q = 22413$, onde $KC = \frac{15154 \;.\; 1,07}{22413} = 0,73$.

Le dimensioni dei tronchi inferiori in largo e profondo potranno esser quelle del primo e più grande influente e anche minori, se il terreno non abbia molta tenacità; in caso contrario si aumenterà la larghezza di qualche piede a misura che entrano nel nuovo alveo i particolari influenti, e si eleveranno gli argini in giusta distanza dalle sponde per le ragioni già dette altrove (419).

423. Passiamo ai fiumi impediti. L' esperienza è l' unico mezzo per conoscerne la portata, cioè bisogna determinarne con una particolare osservazione la media celerità (376). Al Quadrante idrometrico il cui uso espone a gravissimi sbagli (378), e a molte altre macchine di equivoco risultato sostituirono alcuni un grosso cilindro di legno leggiero di una lunghezza un poco minore dell' attual profondità del fiume, e fermati ad una sua estremità tanti piccoli pesi quanti bastassero a mantenerlo verticale e a fior

FIG. d' acqua, fissarono nell' altra una piccola verga che indicasse gli occulti moti della parte sommersa, e lo esposero alla corrente in un tratto assai regolare e diritto, trasportandolo ora nel filone ed ora in vicinanza delle due sponde e notando gli spazj da esso trascorsi in un dato tempo, dai quali poi col solito metodo (378) conclusero la media celerità di tutto il fiume. Infatti se il cilindro movendosi conservi la situazion verticale o solamente faccia a luogo a luogo qualche leggiera oscillazione, è manifesto che la sua celerità sarà la risultante di tutte le varie celerità con cui si muovono i filetti aquei dalla superficie fin verso il fondo, e perciò questa celerità potrà sicuramente prendersi per la media.

424. Può aversi lo stesso intento con un' altra semplicissima macchinetta. Formato col piccol tubo *on* di metallo
48. o di vetro e col concavo emisfero Q di legno il corpo *oQn* di una gravità specifica eguale a quella dell' acqua, ed introdottolo nel cordoncino RS di 40 o 50 tese strettamente annodato alle funicelle GRE, FSH alquanto più lunghe della doppia larghezza del fiume, si scelga un tratto regolare AD di 40 o 50 tese e nel fondo di esso in vicinanza delle rive si fissino i quattro stabili AE, BG, CH, DF, a due dei quali BG, DF si fermino fortemente e quasi a fior d' acqua i capi delle funicelle GE, FH, avvolgendone il rimanente agli altri due AE, CH finchè le funicelle sieno ben tese. Ciò fatto 1°. si abbandoni il lungo e sottil filo *pq* a cui è attaccato il corpo *oQn*, e si noti lo spazio che in 5″ o 6″ vien trascorso da *oQn*: 2°. ricondotto *oQn* in R per mezzo del filo *pq*, si sommergano nell' acqua alla profondità d' un piede le funicelle GRE, FSH e si ripeta la misura dello spazio che trascorre *oQn* nel tempo stesso di 5″ o 6″: 3°. si abbassino nuovamente d' un altro piede le funicelle GRE, FSH e così si prosegua di piede in piede fino al fondo del fiume, notando i varj spazj che in tempo sempre eguale si trascorrono da *oQn*: 4°. svolgansi di qualche tesa le funicelle GRE, FSH dai due stabili AE, CH e si avvolgano ai due BG, DF onde

il cordoncino RS ed il corpo *oQn* passi ad una seconda stazione, quindi ad una terza, ad una quarta ec. secondo la maggiore o minor larghezza del fiume, e in ciascuna stazione si ripetano a varie profondità le misure degli spazj in egual tempo trascorsi da *oQn*, e si rilevi infine da tutti insieme la media celerità (378). Ben si vede che essendo *oQn* della stessa specifica gravità dell' acqua, concepirà subito la celerità di quello strato in cui s' immerge, e rappresenterà col suo moto il moto indiscernibile dei filetti fluidi nelle loro diverse profondità: sarà anche facile di immaginare un meccanismo per avvolgere, svolgere, abbassare e rialzar prontamente a piede a piede le funicelle GRE, FSH. E si osservi che si è detto *a piede a piede* perchè tanto basta per l' ordinario: ma in casi di gran premura ove l' estrema esattezza può decidere della felicità o infelicità d' un lavoro, potranno farsi le immersioni di mezzo in mezzo piede, potranno moltiplicarsi le stazioni, e si avrà un risultato tanto più giusto quanto sarà più grande il numero delle osservazioni.

FIG. 48.

425. Determinata pertanto o con l' uno o con l' altro o per maggior sicurezza con ambedue gli strumenti la media celerità dell' acqua, si avrà subito la portata del fiume (379). In questo solo elemento i fiumi liberi differiscono dagli impediti: le dottrine sulla pendenza, sull' altezza e sulla larghezza dell' alveo (417.419) son comuni ad ambedue.

Applicazione. Vogliasi la portata d' un fiume la cui sezione GLKMF ha la figura e le dimensioni di sopra (420) 42.
cioè NB = LM = *pie.* 30, GN = 10, FB = 18, NL = 12, PK = 3, 7, e da 11 immersioni nella stazione N si sono avuti in 6″ *pie.* 50, 57, 62, 70, 69, 69, 51, 49, 48, 40, 38; da 14 immersioni nella stazione A in egual tempo *pie.* 59, 60, 64, 72, 72, 77, 78, 81, 80, 80, 78, 58, 51, 39; e da 11 immersioni nella stazione B in tempo parimente eguale *pie.* 54, 58, 58, 63, 68, 74, 72, 65, 60, 51, 47.

Sommati i numeri delle tre stazioni e divise le somme

FIG.

per 11, 14, 11 (378), si ha $\frac{603}{11} = 54,8$; $\frac{949}{14} = 67,8$; $\frac{670}{11} = 60,9$: sommati nuovamente questi tre numeri e divisa la somma per 3, viene $\frac{183,5}{3} = 61$ incirca; e poichè $6'' : 61 :: 1'' : 10,17$, la celerità media del fiume sarà di *pie.* 10, 17 in $1''$. Ora il rettangolo $NM = BN \cdot NL = 360$ (L. 600), il
42. triangolo $GNL = \frac{GN \cdot NL}{2} = 60$ (L. 601), il triangolo $FBM = \frac{FB \cdot BM}{2} = 108$ e il triangolo $LKM = \frac{LM \cdot PK}{2} = 55$ incirca; dunque la sezione $GLKMF =$ *pie. qua.* 583, e perciò la portata $Q = 583 \cdot 10,17 = 5929$ piedi cubici d' acqua somministrati dal fiume in $1''$.

Macchine Idrauliche.

426. Non possiamo quì trattenerci nell' esposizione di quelle macchine che gli antichi e i moderni Idraulici hanno inventate o per giuoco o per lusso: benchè stimabili ed ingegnose, non hanno un fine tanto importante da trovar luogo in questi Elementi. Noi intendiamo per Macchine Idrauliche tutte quelle ove l'acqua applicata come una forza meccanica mette in un movimento uniforme degli argani, delle ruote dentate e in generale delle leve.

427. Queste macchine hanno d'ordinario una gran ruota che ricevendo l'urto della corrente trasmette il moto alle varie parti dell' edifizio. Nella circoferenza ADG di que-
49. sta ruota si fissano stabilmente delle *ali* o tavole AB, DE, GF ec. che per lo più sono normali al piano della ruota e rettangolari: l' acqua correndo incontra successivamente quest' ali e costringe la ruota ad aggirarsi con una certa forza che dipende insieme dalla posizion dell' ali, dal loro numero, dalla lor grandezza e dalla proporzione delle celerità della ruota e dell' acqua.

428. Quanto alla posizion dell' ali, non si penerà molto a

to a

FIG.

to a convincersi che delle due piccole aree Oo, Mm, l'inclinata Mm benchè presenti all' acqua una maggior superfi- 49.
cie e sia in maggior distanza CM dal punto C d' appoggio, riceve però un urto assai più debole di quell' urto diretto che riceve la normale Oo; onde quanto più spesso le ali della ruota torneranno alla situazione AB, tanto ne sarà più grande la forza. E di quì può concludersi che il maggior numero d' ali è il più vantaggioso, specialmente se il moto della ruota non sia molto veloce; nè però conviene di moltiplicar l' ali in modo che non resti ai filetti fluidi un certo intervallo per cui agiscano liberamente: la sola esperienza può fissar questo numero, e si è imparato da lei che ad una ruota ordinaria di 4 o 5 piedi di diametro convengono 20 o 24 ali, e che questo numero può anche diminuirsi quando la loro immersione nell' acqua è considerabile. Anche la molta larghezza di queste ali, trattandosi d' una ruota immersa in un fiume, contribuisce alla forza, poichè quanto più si allarga la data superficie dell' ala, tanto è più grande l' impulsione: ma se la ruota sia mossa da una quantità d' acqua determinata e ristretta in canali, giacchè quanto più cresce la larghezza dell' ala e perciò del canale, tanto più diminuisce l' altezza della data acqua e perciò anche il suo impulso, converrà contentarsi d' una mediocre larghezza d' ali. Infine è chiaro che la celerità della ruota potrà stimarsi ben proporzionata con quella della corrente quando la quantità di movimento uniforme che ella produce nella resistenza qualunque che se le oppone, sarà la più grande che possa aversi. Sia pertanto r la massa o resistenza da vincersi, c la celerità uniforme di essa e g la sua distanza dal punto d' appoggio; sia χ la celerità media dell' acqua, x la cercata celerità uniforme della ruota, $AB = a$ l' ala o piano che riceve dall' acqua un urto diret- 49.
to f, e $CO = h$ la distanza del centro C della ruota dal centro O di quest' urto; dunque $\chi - x$ è la celerità residua del fluido (380) ed rc è la quantità di moto della resistenza, che perciò dovrà essere un massimo. Se si supponga che

un piano qualunque b esposto normalmente all'acqua, riceva da essa l'urto o forza φ, si avrà (382) $f:\varphi::a(\chi-x)^2:b\chi^2$ ed $f=\frac{a\varphi(\chi-x)^2}{b\chi^2}$: ma dall'equilibrio che in ciascun istante si produce e si distrugge tra la resistenza e la forza, abbiamo (235) $rg=fh=\frac{ah\varphi(\chi-x)^2}{b\chi^2}$ e dal moto uniforme di ambedue viene $c:x::g:h$ (266) onde $g=\frac{ch}{x}$; dunque $rc=\frac{a\varphi x(\chi-x)^2}{b\chi^2}$ che dee essere un massimo. Si differenzj pertanto quest' espressione e si avrà $\frac{d(rc)}{dx}=\frac{a\varphi\chi^2-4a\varphi\chi x+3a\varphi x^2}{b\chi^2}=0$, cioè $x^2-\frac{4\chi x}{3}=\frac{-\chi^2}{3}$ e perciò $x=\frac{2\chi\pm\chi}{3}$. Il segno + dà $x=\chi$ o la celerità della ruota eguale a quella dell' acqua, valore che non serve, mentre allora cesserebbe ogn' urto; ma il segno − dà $x=\frac{\chi}{3}$ massimo cercato, da cui si vede che per avere il più grande effetto della ruota bisogna che la sua celerità sia $\frac{1}{3}$ di quella dell' acqua; e l' esperienza infatti poco scostandosi dalla teorìa fa giungere la celerità della ruota a $\frac{2\chi}{5}$. Sostituito il valor di x e fatto $b=a$, si trova la quantità di moto $rc=\frac{a\varphi x(\chi-x)^2}{b\chi^2}=\frac{4\varphi\chi}{27}$, e poichè chiamando d l' altezza dovuta alla celerità χ dell' acqua, si ha la forza della pressione o urto diretto $\varphi=ad\gamma$ (369), sarà finalmente il valore assoluto del cercato massimo $rc=\frac{4ad.\chi\gamma}{27}$, cioè la ruota produce il suo massimo effetto quando è capace d' imprimere la celerità χ della corrente al prisma d' acqua $\frac{4ad}{27}$.

429. Del resto vi son degli Idraulici che per determi-

nar le più importanti dimensioni d' una macchina mossa dall' acqua d' un condotto, dopo aver data a questo la forma d' un arco concavo IDEL per cui mezzo l' acqua giun- ge all' ala in E con impulso più vigoroso, prendono l' altez- 49.
za $HK=c$ della conserva per comune scala delle misure e fanno l' elevazione del canale o $LK=\frac{c}{2}$, il raggio CA $=c$, l'ala $AB=\frac{c}{4}$ e la distanza $CL=2c$: che se le circostanze del luogo obblighino a collocar la macchina in gran distanza dalla conserva, prescrivono allora di inclinare il canale IE di $\frac{1}{10}$ della sua lunghezza affinchè la pendenza renda all' acqua la celerità distrutta dall' attrito, e la macchina agisca come se fosse in vicinanza della conserva. Questo metodo è fondato sulla proporzione che tutte le dipendenze della macchina debbono aver con la forza dell' acqua onde se ne ottenga il maggiore effetto possibile: merita perciò di esser preferito alle regole pratiche dei volgari Artefici, le quali assai di rado hanno per fondamento il raziocinio e l' esperienza.

430. Finiremo con alcuni Problemi Idromeccanici per esercizio degli Studiosi.

I. Esprimere in piedi cubici le libbre francesi di un dato volume $v=\frac{p}{\gamma}$; all' incontro esprimere in libbre francesi i piedi cubici di un dato volume $v=a^2b\gamma$; e dato il peso p ed il volume v d' un corpo, esprimerne all' ordinaria maniera la specifica gravità γ. *Ris.* 1°. $v=$ *pie. cub.* $\frac{p}{70\gamma}$: 2°. $v=$ *lib.* $70a^2b\gamma$: 3°. $\gamma=\frac{p}{70v}$.

II. Dato il peso $P=$ *lib.* 200. e la gravità specifica $\Gamma=1,121$ d' un uomo, trovare il peso x di un tal pezzo di sughero di una gravità specifica $\gamma'=0,24$ che la gravità specifica dell' uomo e del sughero uniti insieme sia a quella dell' acqua di fiume o a $\gamma = 1,009$ nella ragione di $m = 9$ ad $n = 10$. *Ris.* $x = \frac{P\gamma'(\Gamma n - \gamma m)}{\Gamma(\gamma m - \gamma' n)} =$ *lib.* 14. incirca.

III. Dato il Peso $P =$ *lib.* 2 e la gravità specifica $\Gamma = 18,261$ d' un pezzo d' oro, trovare il volume x, il raggio y e la grossezza uniforme $y - z$ di un globo vuoto in cui dovrà conformarsi l' oro affinchè la gravità specifica del globo sia a quella dell' acqua piovana o a $\gamma = 1$, nella ragione di $m = 1$ ad $n = 2$. *Ris.* 1°. $x = \frac{Pn}{\gamma m} =$ *pie. cub.* 0,057143: 2°. $y = \sqrt[3]{\frac{3Pn}{4\pi\gamma m}} =$ *pie.* 0,2389: 3°. $z = \sqrt[3]{\frac{3P}{4\pi}\left(\frac{n}{\gamma m} - \frac{1}{\Gamma}\right)} =$ *pie.* 0,2367.

IV. Dati due vasi, l' uno sferico, l' altro cilindrico e circoscrittibile allo sferico, trovare il valore e la ragione delle pressioni che soffre la loro superficie totale dal fluido che gli riempie. *Ris.* 1°. il valore di ciascuna pressione è triplo del peso del fluido: 2°. le due pressioni son tra loro come 3 a 2.

V. Determinar la pressione che soffre un triangolo rettangolo d' una base b e d' un altezza l quando con la base orizzontalmente situata è immerso in un fluido ad una distanza c dal piano di livello e forma con l' orizzonte un angolo i d' inclinazione. *Ris.* Se il triangolo ha il vertice in basso, si troverà la pressione $s = \frac{\gamma bl \ sen\ i}{2}\left(c + \frac{l}{3}\right)$; se lo ha in alto, sarà $s = \frac{\gamma bl \ sen\ i}{2}\left(c + \frac{2l}{3}\right)$.

VI. Data la lunghezza $b =$ *pie.* 200 di un argine rettangolare, l' altezza $a =$ *pie.* $3.\frac{1}{2}$ a cui vi giunge l' acqua, e l' angolo $i = 42°$ della scarpa, trovar le pressioni s', s'' orizzontale e verticale che egli soffre dall' acqua. *Ris.* $s' = \frac{a^2 b\gamma}{2} =$ *lib.* 85750, $s'' = \frac{a^2 b\gamma \cot i}{2} =$ *lib.* 95235.

VII. Data la lunghezza $b =$ *pie.* 10 e l' altezza $l =$ *pie.* 4 d' una cateratta rettangolare che verticalmente sommersa nell' acqua ad una distanza $c =$ *pie.* $\frac{1}{2}$ dal piano di livello, chiude all' acqua stessa l' uscita, determinar la forza f occorrente per innalzarla, supposto che il suo attrito contro gli incastri sia una parte $\frac{1}{n} = \frac{1}{3}$ della pressione e che $p =$ *lib.* 120 sia il peso della cateratta. *Ris.* $f = \frac{2[2pn + b\gamma l(2c + l)]}{3n} =$ *lib.* $3271\frac{1}{9}$, forza che anderà scemando a misura che la cateratta si alzerà sopra l' acqua.

VIII. Costruire di fianco ad un fiume una cateratta rettangolare che potendosi liberamente muovere intorno a due pernj, stia chiusa da se medesima nello stato permanente del fiume, e da se stessa si apra nei soli tempi o di piena per colmare un terreno o d' aridità per irrigarlo. *Ris.* L' altezza della cateratta si farà eguale a quella dell' acqua nel suo stato permanente e i due pernj si fisseranno in basso ai $\frac{2}{3}$ di quest' altezza: nei tempi di piena la cateratta con la sua parte maggiore si aprirà in fuori a seconda dell' urto dell' acqua e con la minore verrà in dentro; nei tempi d' aridità per l' opposto verrà in dentro con la maggiore, e si aprirà in fuori con la minore.

IX. Si è affondata in un fiume una barca che col suo carico forma un volume $v =$ *pie. cub.* 150 ed un peso $p =$ *lib.* 15000: si cerca la forza f necessaria a sollevarla alla superficie. *Ris.* $f =$ *lib.* $5873\frac{1}{3}$.

X. Per mezzo di certi vecchi cannoni di ferro fuso vorrebbe affondarsi in un porto di mare una quantità d' abeti da costruzione il cui volume è $v =$ *pie. cub.* 700: si cerca il peso Π che dovrà unirsi al legname per tenerlo sommerso. *Ris.* $\Pi =$ *lib.* 27529.

XI. Si è costruito un Globo aerostatico il cui diametro è di *pie.* 36, e gli si vorrebbe unire un peso di *lib. franc.* 1504; si cerca a quale altezza x si solleverà quando nella pianura la gravità specifica dell' aria è $\Gamma = 0{,}001$. *Ris.* $x =$ *pie.* 3276.

XII. Supponendo tutto come nel problema passato e aumentando solamente il peso fino a *lib. franc.* 2000, a quale altezza si solleverà il Globo? *Ris.* E' impossibile che il Globo s' innalzi.

XIII. L' acqua stagnante forma col suo livello un piano indeterminato X in un recipiente la cui base b ha un piccol lume m: si cerca il tempo t in cui quest' acqua, aperto il foro, scenderà dall' attuale altezza a all' altezza $a - x$ da assegnarsi ad arbitrio. *Ris.* $t = \frac{4}{5m} \sqrt{\frac{2}{g}} \int \frac{X dx}{\sqrt{(a-x)}} +$ *Cost.*

XIV. Determinare il tempo t in cui l' acqua uscendo per un piccol lume m aperto nella base b d' un vaso o prismatico o piramidale d' un'altezza p, scende dall' altezza a all' altezza $a - x$ da assegnarsi ad arbitrio, per esempio all' altezza o. *Ris.* 1°. $t = \frac{8b}{5m} \sqrt{\frac{2}{g}} [\sqrt{a} - \sqrt{(a-x)}]$ e per l' altezza o, $t = \frac{8b}{5m} \sqrt{\frac{2a}{g}}$: 2°. $t = \frac{8a^2 b}{5p^2 m} \sqrt{\frac{2}{g}} \times \left[\frac{8}{15} \sqrt{a} + \left(\frac{2(a-x)}{3a} - \frac{(a-x)^2}{5a^2} - 1 \right) \sqrt{(a-x)} \right]$, e per l' altezza o, $t = \frac{64 a^2 b}{75 p^2 m} \sqrt{\frac{2a}{g}}$.

XV. Con un vaso cilindrico nella cui base di *pie.* $\frac{1}{4}$

di diametro è un piccol lume circolare di un raggio z, costruire un orologio ad acqua diviso in ore 6, dato che l' acqua cominci a scendere da un' altezza di *pie.* $1 \frac{1}{2}$. *Ris.* 1°. $z =$ *lin.* 5, 22 incirca: 2°. la prima divisione che segnerà la prima ora in alto avrà una lunghezza di *poll.* $5 \frac{1}{2}$, la seconda di *poll.* $4 \frac{1}{2}$ ec. in progressione aritmetica.

XVI. Da un fonte perenne scorre uniformemente nel tempo θ la quantità q d' acqua che col suo livello forma un piano indeterminato X in un recipiente la cui base b ha un piccol lume m: si cerca il tempo t in cui l' acqua che è già ad un' altezza a, giungerà all' altezza x da assegnarsi ad arbitrio. *Ris.* $t = \int \frac{X dx}{\frac{q}{\theta} - \frac{5m}{4} \sqrt{\frac{gx}{2}}} +$ *Cost.*

XVII. Determinare il tempo t in cui una quantità q d' acqua entrando uniformemente per un tempo θ ed uscendo da un piccol lume m aperto nella base b d' un vaso prismatico, giunge dall' altezza a ove era in principio, all' altezza x da assegnarsi ad arbitrio, per esempio alla massima. *Ris.* $t = \frac{8b}{5m} \sqrt{\frac{2}{g}} [\sqrt{a} - \sqrt{x} + \frac{4q}{5\theta m} \sqrt{\frac{2}{g}} (\mathrm{L}[m^2 \times \sqrt{ax} + \frac{8qm}{5\theta\sqrt{2g}} (\frac{4q}{5\theta m} \sqrt{\frac{2}{g}} - \sqrt{x} - \sqrt{a})])]$: nel caso dell' altezza massima $x = \frac{32 q^2}{25 g m^2 \theta^2}$, si ha $t = \infty$.

XVIII. Sopra un piano orizzontale senza attrito si muove con una celerità $C =$ *poll.* 30. in 1″ un globo d' avorio il cui diametro è $a =$ *poll.* 1 e la cui gravità specifica sta a quella dell' aria come $\Gamma = 1{,}825$ a $\gamma = 0{,}001$: si cerca in quanto tempo il globo trascorrerà $s =$ *poll.* 500 supposta la resistenza del mezzo. *Ris.* Si troverà $t = 17'', 33'''$.

XIX. Fu lanciato verticalmente all' insù con una celerità $p=60$ in $1''$ il globo già descritto di sopra (393): si cerca se per determinar la vera altezaa σ a cui si sollevò, possa trascurarsi la resistenza del mezzo. *Ris.* Trascurando la resistenza dell' aria si avrà $\sigma=\frac{p^2}{2g}=59,6$: ma calcolandola per mezzo della formula $hdt=\frac{-k^2dc}{k^2+c^2}$ (392), si troverà $\sigma=\frac{k^2}{2h}\,l\left(1+\frac{p^2}{k^2}\right)=22,56$ intendendo per l il logaritmo iperbolico.

XX. Supposto che lo stesso globo spinto verticalmente all' insù giunga fino all' altezza $\sigma=22,56$, determinar la celerità p con cui fu lanciato calcolando la resistenza del mezzo. *Ris.* $p=k\sqrt{(e^{\frac{2k\sigma}{k^2}}-1)}=60$.

XXI. Da uno spillo d' un raggio $r'=$ *poll.* $\frac{1}{2}$ si vorrebbe un getto verticale d' un' altezza $a=$ *pie.* 40: si cerca l' altezza x della conserva e il raggio z del condotto. *Ris.* 1°. $x=$ *poll.* 700: 2°. $z=$ *lin.* 39, 53.

XXII. Posto che in un condotto di un raggio $r=$ *poll.* 4 l' attrito diminuisca la portata dell' acqua di $\frac{1}{n}=\frac{1}{4}$, trovare il raggio x di un altro condotto d' egual lunghezza, la cui portata sotto una stessa altezza d' acqua sia a quella del primo come 1 a $p=4$. *Ris.* $x=\frac{r+\sqrt{(4np(n-1)+1)}}{2n}$ $=$ *poll.* 7, 44.

XXIII. Dato che l' *oncia d' acqua* abbia una larghezza $l'=$ *poll.* 3, un' altezza $a'=$ *poll.* 4 ed un battente $b'=$ *poll.* 2, determinar i pollici x che si avranno da un emissario rettangolare la cui larghezza $l=$ *poll.* 420 e l' altezza $a=$ *poll.* 30 senza battente. *Ris.* $x=\frac{la\sqrt{a}}{l'[(a'+b')\sqrt{(a'+b')}-b'\sqrt{b'}]}$ $=$ *poll.* 1938 in circa.

FIG.

XXIV. Supposto tutto come nel passato problema cioè $l'=3$, $a'=4$, $b'=2$, $a=30$, e valutata inoltre la celerità superficiale $c=$ *pie.* $3\frac{11}{12}$ dell' acqua in $1''$, assegnare il battente b a cui questa celerità corrisponde, e i pollici d' acqua x che si avranno dall' emissario. *Ris.* 1°. $b=$ *poll.* 3,047: 2°. $x=\frac{l[(a+b)\sqrt{(a+b)}-b\sqrt{b}]}{l'[(a'+b')\sqrt{(a'+b')}-b'\sqrt{b'}]}=$ *poll.* 2176 in circa.

XXV. Ad una data distanza $b=$ *poll.* 4 dal piano di livello d' un canale o d' un fiume aprire un tale emissario rettangolare di una data area $r=$ *poll. quad.* 42, che in un tempo dato $t=$ *or.* 1 si abbia da esso la massima possibile quantità x d' acqua. *Ris.* $x=\frac{5t}{6}\sqrt{\frac{gr}{2}}\,[\sqrt{(b+\sqrt{r})^3}-b\sqrt{b}]=$ *poll. cub.* 113103.

XXVI. Data l' altezza BD $=f=$ *poll.* 36 dell' acqua d' un canale, o d' un fiume, e data la larghezza BC $=l=$ 47.
poll. 12 d' un emissario rettangolare da aprirvisi in fondo, determinare il battente AD $=x$ tale che per l' emissario AC sgorghi in $1''$ una data quantità d' acqua $q=$ *poll. cub.* 6200. *Ris.* $x=\sqrt[3]{\left(\frac{6q}{5l}\sqrt{\frac{2}{g}}-f\sqrt{f}\right)^2}=$ *poll.* 30, 7.

XXVII. Sopra un fiume rettangolare e libero che aveva una sezione $la=$ *pie. quad.* $60a$, ed una data celerità superficiale o un battente b, si è gettato un ponte che ne ha variata la sezione ed il battente, riducendo la ad $l'a'=$ *pie. quad.* $42a'$ e b a b': supposto che l' altezze vecchia e nuova a, a' sieno sensibilmente proporzionali ai battenti vecchio e nuovo b, b', si cerca la ragione delle profondità dell' acqua all' insù del ponte prima e dopo l' esistenza di esso.

Ris. Si troverà $a : a' :: \sqrt[3]{l'^2} : \sqrt[3]{l^2} :: 12{,}08 : 15{,}33$.

XXVIII. Da un fiume rettangolare e libero ma d'insensibil celerità superficiale, vorrebbe derivarsi con un canale parimente rettangolare e libero una quantità d'acqua $q =$ *pie. cub.* 360 in 1'' per servizio di certe macchine idrauliche e di varie irrigazioni: si cerca la sezione $l'a'$ del canale, supposta $la =$ *pie. quad.* 80×6 quella del fiume, e quanta profondità $a - a'$ resterà al fiume dopo lo stabilimento del diversivo. *Ris.* 1°. $l' = \frac{24lq}{5(2al\sqrt{2ag} - 3q)} =$ *pie.* 8,04: 2°. $a' = \sqrt[3]{\frac{(2al\sqrt{2ag} - 3q)^2}{8gl^2}} =$ *pie.* 5,76: 3°. $a - a' =$ *pie.* 0,24.

Fine dell' Idromeccanica.

Lo spettacolo della Luce e dei Corpi che la tramandano dal Cielo ha data l'origine a due Scienze a prima vista molto diverse fra loro, ma realmente sì unite che ai progressi dell'una è divenuta debitrice l'altra delle grandi scoperte onde in questi ultimi tempi si è arricchita. La prima ha per oggetto la Luce stessa ed i suoi fenomeni e si chiama *Ottica*; la seconda i Corpi celesti, la loro situazione, i loro moti, le lor tendenze reciproche, e chiamasi *Astronomìa*.

ELEMENTI D' OTTICA.

431. L'*Ottica* si divide generalmente in due parti: l'una è la *Scienza della Visione* la quale esaminando a parte a parte le varie proprietà della luce nei raggi or diretti ed or piegati per cui si propaga, può anche chiamarsi *Teorìa della Luce*: l'altra è la *Pratica della Visione*, la quale aggirandosi sui mezzi di aumentar le forze visive e componendo una quantità di macchine che producono questo effetto, può anche chiamarsi *Teorìa delle Macchine Ottiche*.

432. Tra le molte questioni dei Fisici sulla materia lucida e sul modo ond'ella si diffonde, niuna ve n'è che interessi le nostre mire: anzi i fondamenti medesimi con cui sogliono spiegarsi i primitivi fenomeni della luce e da cui comunemente deduconsi le leggi del movimento di lei, ci sembrano sì pieni di difficoltà e sì poco dimostrati finora, che abbiam creduto di dovergli sopprimere in faccia ai lumi sicuri dell'esperienza. Benchè dunque e col principio dell'attrazione nelle minime distanze e con l'ipotesi della via brevissima che la natura tende a prescegliere, sieno giunti i Matematici alle conclusioni stesse dei Fisici spe-

rimentatori, nondimeno abbiam voluto piuttosto riportarci affatto a questi ultimi, i quali bisognava pur consultare in tante altre occorrenze, che seguir dei raziocinj ove a dispetto dell' apparato seducente del calcolo, lo spirito mal soddisfatto teme sempre l' equivoco e resta nell' incertezza.

PARTE PRIMA

TEORIA DELLA LUCE

Natura della Luce.

433. Quella sostanza che rende visibili i corpi si chiama *luce*: la privazione e la mancanza totale di questa sostanza lascia l' *ombra* e le *tenebre*.

434. Si sa che posta M la massa d' una molecula lucida, C la sua celerità, F = MC è l' espressione della sua forza (19): ora gli Astronomi ci dimostrano che C è quasi infinita; dunque M dee esser quasi infinitesima: senza ciò, la forza eccessiva della luce metterebbe in polvere quanto incontra per via. Da questa piccolezza estrema delle molecule lucide deducono alcuni che i raggi di luce benchè con mille diversi angoli si seghino scambievolmente, non si confondon però tra loro nè si impediscono nel lor viaggio: ma se l' esperienze più decisive (432) non venissero in soccorso di questa illazione, forse niun Fisico la stimerebbe certa abbastanza per abbracciarla.

L' idea completa della luce comprende più cose: i *corpi* che la diffondono, i *mezzi* che la trasmettono, gli *ostacoli* che la rispingono e gli *organi* che la ricevono.

435. Ogni punto del *corpo* da cui parte la luce si chiama in generale un punto *lucido* o *raggiante*: egli è *luminoso* allorchè sparge una luce sua propria, ed è *illuminato* quando sparge una luce ricevuta d' altronde. Luminoso o

illuminato che siasi, la luce dee partirne sempre in raggi che di lor natura procedono per retta linea; poichè non vi è ragione alcuna d' immaginar nel punto lucido più forze eterogenee che imprimano alla luce un moto curvilineo (95. 130). La sola attrazion della luce potrebbe produr questo effetto (130): ma poichè l' attrazione opera in ragion delle masse (67), che nel nostro caso sono infinitesime (434), ne verrà che se la forza attrattiva non sia infinitamente grande, l' effetto ne diverrà insensibile, e sarà vinto interamente dalla celerità quasi infinita della luce, il cui moto perciò di sua natura è rettilineo.

436. Il *mezzo* che trasmette la luce è *libero* se manca ogni forza estrinseca che la signoreggi e ne diminuisca la quantità; è *diafano uniforme* se un' egual forza opera in lei di continuo e la diminuisce ad ogni passo egualmente; ed è *diafano vario* se più forze ineguali agiscono sopra di essa e l' assoggettano ad ineguali diminuzioni.

437. Nel *mezzo libero* la luce si muove sempre in retta linea, perchè mancando per ipotesi ogni forza estrinseca (436), la propria inerzia (3. 14) le impedisce di cangiar mai la primitiva direzione (435).

438. Nel *mezzo diafano uniforme* la luce si muove parimente in retta linea; perchè le forze estrinseche essendo per ipotesi eguali (436), l' azione dell' una è bilanciata continuamente e distrutta dalla contraria ed eguale azione dell' altra (16), onde la luce si muove come se mancasse ogni forza (437).

439. Ma nel *mezzo diafano vario* la luce *obliqua* cangia direzione ogni volta che il mezzo si cangia; perchè le forze estrinseche essendo per ipotesi ineguali (436), l' azione dell' una nei punti di cangiamento vince la contraria azione dell' altre, onde il raggio è costretto ad obbedire alla più forte e ad incurvarsi: tanto avviene al raggio ΦI allorchè cade obliquamente sul cristallo o *lente* AB (*fig.* 63). Questo incurvamento dicesi *refrazione*; il raggio HD che si piega in D è il *raggio incidente*, il raggio piegato DF che 50.

FIG.

50. entra nel nuovo mezzo BAG, è il *raggio refratto*; e se dal punto d' incontro D si alzi EDG normale al mezzo BA, e il raggio incidente HD si prolunghi in N, sarà HDE l' *angolo d' incidenza* o l' *incidenza*, FDG l' *angolo di refrazione* o la *refrazione*, ed NDF l' *angolo di deviazione* o la *deviazione*. L' esperienza (432) ha mostrato 1°. che i raggi incidente e refratto son sempre in un sol piano colla normale EG; 2°. che il seno dell' angolo HDE d' incidenza al seno dell' angolo FDG di refrazione è sempre in una ragion costante che a suo luogo si assegnerà; 3°. che il raggio refratto DF si accosta alla normale DG se dall' aria passi o nell' acqua o nel vetro o nel cristallo, e se ne discosta se da questi mezzi passi nell' aria.

440. Gli *ostacoli* che respingon la luce sono specialmente i corpi non diafani ovvero *opachi*: e dico *specialmente* perchè anche i corpi diafani rispingono in certe circostanze la luce come vedremo. Il raggio che incontra un corpo opaco, se non vi resti assorbito, è costretto a piegarsi nel punto d' incontro e a tornare nel mezzo primitivo: tale è il caso di ΦO o ΦM allorchè incontra lo specchio MO (*fig.* 55). Questo ritorno dicesi riflessione: il raggio piegato DI che torna nel mezzo AEB è il *raggio riflesso*; e se dal punto D d' incontro si alzi DE normale al piano BA, sarà HDE l' *angolo d' incidenza*, ed EDI l' *angolo di riflessione*. E quì pure ha fatto veder l' esperienza (432) 1°. che i raggi incidente e riflesso son sempre in un sol piano colla normale DE; 2°. che l' angolo d' incidenza è costantemente eguale all' angolo di riflessione: onde la luce è un corpo perfettamente elastico (219).

441. Infine l' organo che riceve la luce è l' occhio. Ne daremo altrove la descrizione, e quì basti osservare che come i corpi illuminati sono in numero assai maggiore dei luminosi, pochissimi raggi vengono all' occhio direttamente; i più gli sono inviati per riflessione dài corpi circonvicini, e la massima parte dei diretti e dei riflessi hanno anche sofferte delle refrazioni prima di giungere alla pupilla; ciò

FIG.

non ostante, tutti i raggi o riflessi o refratti si riguardano come diretti finchè si prescinde dalle proprietà caratteristiche della riflessione e della refrazione (439. 440). L' *Ottica propriamente detta* indaga gli effetti di questi raggi; le particolarità della riflessione e della refrazione formano l' oggetto della *Catottrica* e della *Diottrica*.

Luce Diretta.

Il moto dei raggi lucidi in retta linea (435) produce quattro effetti considerabili a cui può ridursi tutta la Teoria della luce diretta.

442. Il primo è la *divergenza dei raggi lucidi*. In fatti i varj raggi che partono dal punto A si tagliano scambievolmente in A; non posson dunque partirne nè convergenti 51. (L. 478) nè paralleli (L. 499), e però necessariamente divergeranno formando o una sfera A*mn*C, o se vengano in parte impediti, un cono AFE il cui centro o vertice è il punto lucido A. Per altro con un raziocinio molto simile a quello con cui mostrammo altrove (41) il parallelismo sensibile dei gravi cadenti, si può stabilir del pari che ad una certa distanza dal punto lucido A, i raggi che ne procedono posson prendersi in pratica per paralleli. Nè questa distanza è molto grande; poichè supponendo che due linee possan dirsi sensibilmente parallele allorchè il loro angolo di divergenza non è maggior di 20″, se nel triangolo isoscele AIO si faccia l' angolo $A = 20''$, gli angoli sulla base o pupilla IO saranno $I = O = 89°, 59', 50''$; ora il diametro della pupilla massimamente dilatata giunge a $2^{lin.}, 5$; dunque $AO = AI = \frac{2,5 \times sen\, 89°, 59', 50''}{sen\, 20''}$ (L. 762) $= 179^{pie.}$, cioè se il punto lucido A sia distante dall' occhio di 180 piedi, i raggi vi entreranno pressochè paralleli.

443. Ma tornando alla divergenza, sia il mezzo libero

FIG. 51. BCDAdGb ed in esso il cono AFE o la massa m di luce che a diverse distanze $AM = p$, $AE = q$ si riceva sopra due piani paralleli ove formerà le figure simili $MN = r^2\pi$, $EF = r'^2\pi$ (L. 624). Posti v, v' i volumi e d, d' le *densità*, *chiarezze* o *intensità* della luce in MN, EF si avrà $m = dv$, $m' = d'v'$ (II) e $dv = d'v'$: ma i volumi son le figure stesse $r^2\pi$, $r'^2\pi$ (III); dunque $dr^2\pi = d'r'^2\pi$ e perciò $d : d' :: r'^2\pi : r^2\pi :: q^2 : p^2$ (L. 625), cioè *le densità della luce in un mezzo libero sono inversamente come i quadrati delle distanze dal punto lucido* A. Perciò se A sia a una tal distanza che i raggi possan prendersi per paralleli (442), fatta $AH = p = \infty$ ed $HG = a$, sarà $AG = q = p + a = \infty + a = \infty$, e $d : d' :: \infty^2 : \infty^2$, onde $d = d'$, cioè *la densità della luce che si propaga in un mezzo libero per raggi paralleli, è costante*.

52. 444. Non così nei lunghi tratti d'un mezzo diafano uniforme DA. Diviso DA in varj strati DC, EB ec. di egual grossezza, e chiamata d la densità della luce nell'istante in cui penetra il mezzo, ponghiamo che nel primo strato DC venga ella a diminuirsi (436) d'una quantità $\frac{d}{a}$; dunque passato il primo, la sua densità diverrà $d' = d - \frac{d}{a} = \frac{d(a-1)}{a}$; ma nel secondo strato EB, attesa l'uniformità del mezzo, scema nuovamente (436) di $\frac{d'}{a} = \frac{d(a-1)}{a^2}$; dunque passato il secondo, la sua densità sarà $d'' = d' - \frac{d(a-1)}{a^2} = \frac{d(a-1)^2}{a^2}$: così passato il terzo, si troverà $d''' = \frac{d(a-1)^3}{a^3}$, e passato lo strato n^{mo} sarà $d^{(n)} = \frac{d(a-1)^n}{a^n}$; dunque la luce in un mezzo uniforme va continuamente scemando come la serie $\frac{d(a-1)}{a}$, $\frac{d(a-1)^2}{a^2}$ .... $\frac{d(a-1)^n}{a^n}$

$\frac{d(a-1)^n}{a^n}$ e la densità de' suoi raggi divergenti vi decresce in ragion composta dell'inversa dei quadrati delle distanze (443) e della diretta de' due termini della serie che corrispondono a quelle distanze; cosicchè se sia $AG = q = 4AH$
$= 4p$, si avrà $d : d' :: 16p^2 \times \frac{d(a-1)}{a} : p^2 \times \frac{d(a-1)^4}{a^4} :: 16 :$ 51.
$\frac{(a-1)^3}{a^3}$, e posto $\frac{d}{a} = \frac{1}{100}$, $d : d' :: 16 : 0{,}970299 :: 33 : 2$ presso a poco. Ma poichè si sa per esperienza (432) che in un tratto di 189 tese la luce non perde nell'aria che $\frac{1}{100}$ della sua densità, decremento quasi insensibile, la densità della luce per lo spazio almeno di 180 tese nell'atmosfera potrà calcolarsi senza l'introduzion della serie.

445. Del resto niun raggio che venga agli occhi o divergente o parallelo, può mai produrvi di sua natura la perfetta vision degli oggetti; poichè supposto che i varj punti d'un corpo trasmettessero al fondo dell'occhio o un cono o un cilindro lucido, è certo che ciascun punto B, A, D vi sarebbe rappresentato dai circoli KL, EF, PQ di un diametro o maggiore o eguale al diametro della pupilla g e giacchè i punti fisici sono in un corpo innumerabili, gli innumerabili circoli sarebbero costretti a cadere in parte sui lor contigui, le immagini si deformerebbero stranamente e la visione riuscirebbe imperfetta e confusa. Questa è la ragione per cui le immagini degli oggetti esterni che attraversando un piccol foro vanno a dipingersi sulla parete di una camera oscura, son sempre molto languide e assai mal terminate se l'arte non ne corregga il difetto. Vedremo a suo luogo con quale stupendo meccanismo la sapienza infinita di Dio abbia forzati i raggi a convergere dentro all'occhio, onde ogni cono o cilindro lucido Bb, AG, Dd vi si ristringa in un sol punto b, G, d e vi segni accurata e distinta l'immagine del corrispondente punto B, A, D da cui partì.

FIG.

446. Il secondo effetto del moto rettilineo della luce è l'*inversione delle immagini*. In fatti i coni lucidi che escono da più punti contigui B, A, D di un corpo, si incontrano 51. necessariamente e si tagliano in IO: ma poichè ad onta di queste intersezioni non si confondono ne s' impediscon tra loro (434), il cono BI giungerà dirittamente in *b*, il cono DO in *d* e l'uno e l'altro renderanno visibili i punti B, D nei punti opposti *b*, *d* cioè *la situazion dell' immagine* bGd *portata da raggi che una volta sola si segano, è contraria alla situazion dell' oggetto* DAB.

447. L'esperienza (432) ha insegnato che questo appunto è il caso dell' occhio. I coni lucidi o *raggi visuali* B*b*, AG, D*d* dopo di essersi scambievolmente tagliati nella pupilla IO, vanno a delineare in fondo all' occhio l'immagine dei varj punti B, A, D che portan seco (433), e quindi la totale immagine dell' oggetto BAD vi si roverscia. Ora questo roversciamento d'immagini, i cui originali frattanto si vedon da noi nella loro natural positura, dimostra ben chiaro che ciascun punto B, A, D di un oggetto o luminoso o illuminato, si vede sempre nel vertice del cono lucido *b*B, GA, *d*D da cui ce ne è portata l'immagine; e che perciò *l' oggetto ci comparisce sempre nella direzion che hanno i suoi raggi allorchè giungono all' occhio*.

448. Intanto la *visione distinta* non cessa di avere i suoi limiti, e l'esperienza (432) almeno in parte gli ha definiti; poichè per quanto un occhio sia penetrante e ben fatto, si trova che egli più non ravvisa l'immagine di un oggetto, benchè solitario, benchè illuminato dalla luce del giorno, alla distanza di circa 6700 de' suoi diametri. Sia dunque IO la pupilla, BD $= d = 1$ il diametro dell' oggetto, l'angolo BID $= x$, e poichè la gran distanza AI attesa la piccolezza relativa di BD non differisce sensibilmente dai raggi BI, DI, sia BI = DI = AI $= a = b = 6700$; dunque nel triangolo isoscele BID si avrà (L. 768) $\cos x = 1 - \frac{d^2}{2a^2}$, ovve-

FIG.

ro (L. 696) $\operatorname{sen} x = \frac{d}{2a^2} \sqrt{(4a^2 - d^2)} = \operatorname{sen} 30''$ in circa, cioè l'oggetto BD diviene indistinguibile subito che l' 51.
angolo ottico BID formato nella pupilla IO dagli estremi raggi visuali BI, DI è minore di 30''. Ora replicando in varie guise gli esperimenti (432), hanno veduto i Fisici che indebolendosi la luce, l'angolo sotto cui si limita la visione distinta è presso a poco come la radice cuba della distanza del corpo illuminante dall' oggetto; cosicchè chiamata 1 la distanza di un lume per cui il limite della visione sia 30'', e *d* un' altra distanza per cui il limite della visione sia *x*, l'esperienza dà $30'' : x :: \sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{d}$, onde $x = 30'' \times \sqrt[3]{d}$: ma i quadrati delle distanze sono in ragione inversa delle densità o chiarezze della luce (443. 444); dunque presa per misura della chiarezza o per unità di chiarezza (L. 599. 645) la chiarezza del giorno che ordinariamente è costante, e chiamata *c* un' altra chiarezza qualunque data, sarà $1 : c :: d^2 : 1$, $d = \frac{1}{\sqrt{c}}$ ed $x = \frac{30''}{\sqrt[6]{c}}$, cioè *il limite della visione distinta d'un oggetto solitario si ha generalmente dividendo 30'' per la radice sesta della chiarezza della luce in cui è immerso*: così se questa sia $\frac{1}{4}$ della chiarezza del giorno, sarà $c = \frac{1}{4}$ ed $x = \frac{30''}{\sqrt[6]{\frac{1}{4}}} = 38''$ in circa.

La visione distinta degli oggetti non solitarj e molto vicini tra loro ha un limite la metà più ristretto; onde nella chiarezza del giorno divengono essi indistinguibili sotto un angolo di 1'; e in $\frac{1}{4}$ di quella chiarezza, sotto un angolo di 1', 16'' ec. Ma i limiti della *visione confusa* sono assai più vasti, e se l' oggetto non sia illuminato ma luminoso, non si sa bene fin dove si estendano questi limiti.

449. Or poichè l' angolo ottico ha tanta influenza nella visione, che se egli divenga insensibile spariscono i comuni oggetti non luminosi, e i luminosi medesimi benchè di mole straordinaria giungono all' occhio in forma di punti lucidi senza alcuna definibile dimensione: convien dire che da quest' angolo principalmente dipende il nostro giudizio sulla grandezza apparente degli oggetti, i quali perciò (supposte eguali tutte l' altre cose) debbono sembrarci tanto più grandi o più piccoli, quanto è maggiore o minore l' angolo ottico sotto cui ci si presentano; perchè se due oggetti
53. B'D', GD formino nella pupilla I uno stesso angolo B'ID' $=$ bId, è manifesto che l' immagine roversciata ed egualmente grande bd d' ambedue, ci farà concludere B'D' $=$ GD.

450. Di quì l' *apparenze ottiche*, terzo effetto del moto rettilineo della luce. In fatti se B'D' si inclini in B''D', il raggio rettilineo B''I trasmesso da B'' formerà nella pupilla I l' angolo ottico B''ID' $<$ B'ID' e come con una prima apparenza si concluse B'D' $=$ GD, così con una seconda si concluderà B''D' cioè B'D' $<$ GD. Ed ecco perchè i poligoni regolati ed i circoli che veduti *direttamente* compariscono quali sono, guardati *obliquamente* in qualche distanza, si giudicano irregolari e schiacciati. Anzi se la retta B'D' si inclini tanto che giunga a coincidere col raggio visuale o *asse ottico* D'I che passando per il centro della pupilla I sia normale alla superficie dell' occhio, il raggio B'I si confonderà con quest' asse, svanirà l' angolo ottico B'ID' e una nuova apparenza farà concludere che B'D' non è che un punto D'; per la stessa ragione un piano talmente situato che l' asse ID' lo rada, non comparirà che una linea; e un solido che presenti una sola delle sue faccie sarà stimato una semplice superficie.

451. Sia pertanto l' asse ID $= d$, ID' $= d'$; la grandezza o lunghezza lineare d' un oggetto normale BD $= g$; la lunghezza d' un altro oggetto normale B'D' $= g'$; l' angolo BID $= a$; B'ID' $= b$; e si avrà (L. 751) ID $= d = g \cot a$, ID'

$= d' = g' \cot b$; onde $d : d' :: g \cot a : g' \cot b :: \frac{g}{\tan a} : \frac{g'}{\tan b}$ (L. 701), e se gli angoli a, b sieno assai piccoli, ovvero (il che è lo stesso) se le distanze d, d' sieno considerabili, le tangenti non differiranno sensibilmente dagli archi e avremo $a : b :: \frac{g}{d} : \frac{g'}{d'}$, cioè *gli angoli ottici o le grandezze apparenti di due oggetti* BD, BD' *saranno in ragion* 53.
diretta delle lor lunghezze lineari, e reciproca delle lor distanze.

452. Onde 1°. se $g = g'$ sarà $a : b :: d' : d$ cioè *le grandezze apparenti di uno stesso oggetto saranno in ragione inversa delle distanze*: 2°. poichè $d < d'$ e perciò anche $b < a$, *un oggetto esposto in uno stesso modo alla vista, sembrerà diminuir di grandezza a misura che si allontana*, cioè parrà B'D' $<$ BD: 3°. *le parallele* AB', EC' *sembreranno convergenti* in B', C' perchè comparirà sempre B'C' $<$ BC; perciò anche le *linee orizzontali o di livello se non passino per l' asse* ID, *parranno inclinate all' orizzonte.*

453. Che se sia l' oggetto GD $= g'$, l' angolo GID $= b$ ed il resto come sopra (451), si avrà $d = g \cot a = g' \cot b$, e però $g : g' :: \cot b : \cot a :: \tan a : \tan b$, cioè *le vere grandezze di due oggetti in una stessa distanza sono come le tangenti della lor grandezza apparente*. Perciò se sia BG $=$ GD ovvero $g - g' = g'$ e BIG $= a - b = c$, avremo $g - g' (= g') : g' :: \tan a - \tan b : \tan b$; e quindi $\tan a$ $(= \tan(c + b)) = 2 \tan b$, ovvero (L. 719) $\tan c = \tan b - 2 \tan c \tan^2 b$: dunque $\tan b > \tan c$, e $b > c$, cioè *due eguali oggetti* DG, GB *situati in una stessa normale all' asse* ID *sembreranno ineguali, e quello comparirà maggiore che sarà più prossimo all' asse.*

454. In distanze più grandi si aumentano l' apparenze in guisa che tutto si trasforma all' occhio in certe situazioni: una gran linea sinuosa o retta diviene un grand' arco, un arco di mediocre ampiezza si cangia in retta linea, una sfe-

FIG. ra non è più che un circolo, gli angoli si rotondano, l'asprezze svaniscono, gli oggetti anche meglio illuminati son cupi e confusi ec. La general ragione di tutti questi fenomeni è che le distanze smisurate non lascian sentire all'occhio o i risalti di una linea irregolare nel cui piano egli si trova, o le differenze dei lunghi raggi visuali, o il sottil dorso degli angoli, o la forza totale dei raggi lucidi ec. Di quì è che le foreste e le Città molto lontane ci pajono terminate in anfiteatro; il Cielo ci sembra una grande sfera vuota se si guarda all'orizzonte, o una gran volta schiacciata se si osserva al meridiano; il Sole e la Luna ci compariscono come circoli luminosi ec. Da queste apparenze trasse l'origine la *Prospettiva* o l'arte di delineare sopra una superficie i diversi oggetti più o meno lontani con le illusioni ed inganni medesimi con cui naturalmente si presentano all'occhio: ma come la teorica non può quì disgiungersi dalla pratica, e i dettagli di pratica riescirebber lunghi e nojosi per chi non è destinato al Disegno o alla Pittura, basterà di averne indicati i fondamenti più generali.

53. 455. Un'altra specie d'apparenze ottiche nasce dalla relativa situazion degli oggetti. Il corpo B che osservato da b comparisce in Z, osservato da d sembra in Z' e muta il *luogo apparente* secondo il punto diverso da cui è veduto: così la lancetta d'un orologio un poco lontana dai segni orarj non mostra l'ora precisa se *l'asse ottico* di chi la guarda non è normale al piano dell'ore. Questo *cangiamento angolare di luogo* chiamasi *parallasse* e merita considerazione, specialmente nei corpi celesti, come vedremo. Sia dunque $dBb = p$ la parallasse di B relativa ai punti b, d, sia $Bb = d$, $bd = r$, e condotta dI normale a db sia $Idb = \pm a$. Avremo (L. 738) $d : sen(90° \pm a)\ (= cos\ a) :: r : sen\ p = \frac{r\ cos\ a}{d}$. Quindi 1°. se B scenda in O e sia bd il raggio della Terra, dO l'orizzonte e perciò $a = 0$, la parallasse orizzontale che chiamo P darà ~~sen~~ $P = \frac{r}{d}$, ovvero se r è costante e P un angolo piccolissimo, $P = \frac{1}{d}$ (11); 2°. anzi se $a = a'$ anche $sen\ p : sen\ p'$, ovvero $p : p' :: \frac{1}{d} : \frac{1}{d'} :: d' : d :: P : P'$, cioè *le parallassi orizzontali o d'un'altezza medesima sono in ragione inversa delle distanze dei corpi*; 3°. Sostituito P nella prima formula, sarà $sen\ p = sen\ P\ cos\ a$ oppure $p = P\ cos\ a$, cioè *la parallasse d'un corpo a qualunque altezza è il prodotto della parallasse orizzontale per il coseno di quell'altezza*; 4°. Se siano h, b gli apparenti diametri di due corpi, g, g' i veri, ed $r = r'$, sarà (451) $\frac{g}{h} : \frac{g'}{b} :: d : d' :: \frac{1}{P} : \frac{1}{P'}$ e perciò $g : g' :: \frac{h}{P} : \frac{b}{P'}$ e $g' = \frac{bgP}{hP'} = \frac{gP}{P'}$ se h, b siano eguali almeno prossimamente: onde *conosciuta la vera grandezza d'un corpo e la sua parallasse orizzontale, basta conoscer la parallasse dell'altro per conoscerne la grandezza*; 5. e poichè differenziando l'equazione $p = P\ cos\ a$, si ha $\frac{dp}{da} = -P\ sen\ a$, fatto $\frac{dp}{da} = 0$ (L. 1043), viene $a = 0°$ ovvero $= 180°$, la *massima parallasse* è l'orizzontale; 6°. se per altro il raggio terrestre sia vario in diversi luoghi, la parallasse corrispondente sarà diversa: onde poichè la Terra è compressa ai poli (204), tralle parallassi orizzontali l'*equatoriale è la massima e la polare è la minima*; 7°. la parallasse fa comparire gli astri meno elevati del vero nel circolo verticale in cui si misura l'altezza e la parallasse; 8°. e perciò si aumenta la lor distanza apparente: perchè se son in verticali diversi o in parti opposte del medesimo verticale, il parallattico abbassamento gli scosta scambievolmente, e se sono dalla medesima parte di uno stesso verticale, l'astro più basso soffrendo una maggior parallasse si scosta più che l'altro dallo zenit, e la differenza delle due parallassi è un aumento della loro distanza; 9°. infine se $d = 1000000$, sarà $P = 2''$ in circa, parallasse insensibile e perciò Bb, Bd saran parallele fisicamente, e $d = \infty$. 53.

FIG.

456. Vi sono anche delle apparenze ottiche nel movimento, o sia questo nei soli oggetti mentre l' occhio sta immobile, o sia negli uni e nell' altro, o finalmente nell' occhio solo.

Poichè si sa per esperienza (432) che le stelle fisse trascorrono un arco di 15° in un' ora o di $15''$ in $1''$ senza che l' occhio si accorga di questo moto, è forza il concludere che *un moto qualunque diventa insensibile se lo spazio trascorso in* $1''$ *faccia nell' occhio un angolo tra* $15'$ e $20''$: perciò posto lo spazio $B'D' = 1$ e l' angolo $B'ID' = 17''$,
53 si avrà (L. 751) $ID' = cot\ 17'' = \frac{1}{tang\ 17''} = 12000$ in circa, cioè *l' oggetto sembrerà immobile se in* $1''$ *trascorrerà solamente* $\frac{1}{12000}$ *della sua distanza dall' occhio.*

457. In generale sieno gli oggetti D, D' che nelle distanze $ID = d$, $ID' = d'$ trascorrano in egual tempo e dalla medesima parte gli spazj paralleli $DB = s$, $D'B' = s'$: gli angoli ottici $BID = a$, $B'ID' = b$ rappresenteranno dunque o gli *spazj apparenti* o anche (poichè i tempi eguali del moto danno $s = c$, $s' = c'$ (18)) le *celerità apparenti* dei dati oggetti, e si avrà come sopra (451) $d = c\ cot\ a = \frac{c}{tang\ a}$, $d' = c'\ cot\ b = \frac{c'}{tang\ b}$, e $tang\ a : tang\ b :: \frac{c}{d} : \frac{c'}{d'}$; onde in distanze assai grandi sarà pur come sopra (451) $a : b :: \frac{c}{d} : \frac{c'}{d'}$, cioè *le celerità apparenti sono in ragion composta della diretta delle celerità vere e dell' inversa delle distanze.*

Perciò 1°. se sia $a = 0$, sarà $\frac{c}{d} = 0$ e $c = 0$, cioè se l' oggetto D non abbia celerità alcuna apparente, sarà immobile riguardo all' occhio quando pur ne avesse una vera lungo l' asse DI: 2°. se $c = c'$ e $d' > d$, sarà $a > b$, cioè benchè D, D' abbiano un' egual celerità vera, se D' sia più distante di D, la sua celerità sembrerà minore: 3°. se $c : c' :: d : d'$, sarà $a = b$, cioè se le celerità vere di D, D'

siano

FIG.

siano proporzionali alle lor distanze dall' occhio, parrà che D, D' si muovano con egual celerità; e le celerità apparenti saranno poi realmente eguali se sia $c = c'$ e $d = d'$.

458. In quest' ultimo caso ha luogo una nuova e singolare apparenza; poichè se due oggetti K, F che per l' egual celerità e lontananza dalla pupilla I, non cangian situazione tra loro, la cangin però riguardo all' oggetto fisso C', 53.
e passando da K, F in H, L faccian che l' angolo ottico primitivo C'IK si aumenti e divenga C'IH: l' occhio quando manchi d' ogni altra regola per giudicar del vero, trovando sempre eguali gli angoli FIK, LIH e sempre maggiori gli angoli C'IK, C'IH, stimerà immobili i due oggetti K, F e attribuirà un moto contrario all' oggetto fisso C'. Così la Luna il cui moto in un tempo corto è impercettibile (456), sembra correr velocemente in Settentrione allorchè il vento spinge a Mezzogiorno una gran nuvola che le sta sotto.

459. Posto ciò; se unitamente agli oggetti K, F si muova senza avvedersene anche l' occhio I, tutto il moto apparirà nell' oggetto fisso C' e questo moto apparente sarà contrario ma simile e parallelo al moto reale dell' occhio: così gli alberi alla sponda di un fiume sembrano andare all' insù, mentre la corrente rapisce all' ingiù lo spettatore entro al suo legno, ed un oggetto che si muova sopra la sponda parallelamente allo Spettatore, gli parrà o non muoversi o muoversi assai lentamente o anche andare all' indietro; così se la forza d' un vortice faccia girar con furia un Vascello, l' Isole e gli Scogli all' intorno avranno per un Passeggiero inesperto che fissamente gli osservi, un apparente ed opposto moto di rotazione: e tanto più vere compariranno queste illusioni quanto sarà più vasto il Vascello o quante più saranno le sue parti che in diverse distanze e positure sembrando immobili, faranno con maggior sicurezza attribuire agli oggetti fissi quel movimento: tale è il caso della Terra rispetto ai Corpi celesti.

Dunque movendosi l' occhio I unitamente agli oggetti

Gg

FIG. 53. K, F, se anche l' oggetto C' si muova nel senso stesso ma con movimento più tardo, l'angolo ottico C'IK, benchè con minore aumento di prima, diverrà tuttavia sempre più grande, e l' oggetto C' sembrerà muoversi al solito contrariamente colla differenza delle due celerità, cioè anche il moto più lento nel senso stesso dell' occhio, si cangia in un apparente moto retrogrado.

460. Si muova ora il solo occhio e descriva senza avvedersene un' orbita circolare ETC il cui raggio $ST = r$.
54. 2ª. O l' oggetto immobile è nel centro S, ed avrà un moto apparente eguale ed opposto a quello dell' occhio (459); o è in P nell' asse del circolo ETC (L. 785), e farà un giro simile, la cui ampiezza è determinata dall' *angolo parallattico* $CPS = p$, che posto $SP = R$ molto maggiore di r, sarà $= \frac{r}{R}$ (L. 742). Ma se l' oggetto è in un punto A assai remoto dal piano ETC, a cui si dee riferire e segnatamente al suo centro S, le apparenze son più composte. Pertanto sia AD la normale al piano ETC prolungato se occorra, e suppongasi l' occhio in T. Conduco la retta TD, il diametro ESC che coincida in D, e la normale TH: dipoi le rette HA, SA, TA che attesa la gran distanza potranno prendersi per eguali ad R e tra loro, come pure si prenderanno per eguali gli angoli AHD, $ATD = l$, *latitudine apparente* del Corpo A dal piano ETC. Fatto ciò, e chiamata e la distanza angolare EST dell' occhio dal punto E, avrò 1°. nel triangolo ASH, $AS\,(R) : sen\,AHS\,(sen\,l) :: SH\,(r\,cos\,e) : sen\,HAS = \frac{r\,sen\,l\,cos\,e}{R}$ che potrà chiamarsi la *parallasse di latitudine* cioè la differenza tra la latitudine apparente AHD o ATD e la vera ASD. 2°. nel triangolo AHT rettangolo in H si ha parimente $AT\,(R) : sen\,AHT\,(1) :: TH\,(r\,sen\,e) : sen\,HAT = \frac{r\,sen\,e}{R}$, angolo della parallasse che devia l' oggetto A dal piano verticale ASDA, e che può chiamarsi di *longitudine*. Che se si voglia l' ef-

fetto della parallasse HAT relativamente al piano ETC, poichè $TD = R\,cos\,l$, si avrà $TD : TH :: 1 : sen\,TDH = \frac{r\,sen\,e}{R\,cos\,l}$. Osservo intanto che chiamando L la latitudine vera ASD, si avrebbe egualmente $AH\,(R) : sen\,ASH\,(= sen\,ASD = sen\,L) :: HS\,(r\,cos\,e) : sen\,HAS = \frac{r\,sen\,L\,cos\,e}{R}$. FIG. 54. 2ª.

Quindi fatto $\frac{r}{R} = a$, $\frac{r\,sen\,L}{R} = b$, $a\,sen\,e = x$, $b\,cos\,e = y$, si troverà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, equazione all' ellisse, da cui si ricava che il corpo A descriverà un' ellisse, tanto più compressa quanto minore sarà L.

461. Infine sia un oggetto lucido e fisso H il cui raggio Hd giunga in I quando l' occhio è in b, e passi in d 53.
mentre l' occhio trascorre bd, onde le celerità della luce e dell' occhio sieno Id, bd: compito il parallelogrammo bP, è chiaro (96) che la celerità Id sarà la risultante delle due IP, Ib, delle quali non potendo IP (parallela ed eguale a bd) esser sensibile all' occhio, lo sarà solamente Ib ovvero Pd; onde egli vedrà l' oggetto lucido H per mezzo del solo raggio dP, e lo vedrà perciò non in H ma nella direzione di bI o dP cioè in H' (447). Posta dunque $Id = c$ la celerità della luce, $bd = c'$ la celerità dell' occhio, $bId = HdH' = \alpha$ il movimento apparente o l' *aberrazione* dell' oggetto H, e $dbI = \varphi$ l' angolo fatto dalle direzioni bd dell' occhio ed Ib o Pd del raggio apparente, si avrà $sen\,\alpha = \frac{c'\,sen\,\varphi}{c}$ (L. 738); ove fatto per esempio $c = r = 1$, $c' = arc\,20''$ (L. 707. II°.) $= 20''$ e $sen\,\alpha = \alpha$, sarà $\alpha = 20''\,sen\,\varphi$, aberrazione per un corpo che descriva un arco di 20'' mentre il raggio di luce percorre la distanza r. Se poi $c = \infty$, sarà $sen\,\alpha = \frac{c'\,sen\,\varphi}{\infty} = 0$ ed $\alpha = 0$ (L. 692) cioè l' oggetto H si vedrà nel suo vero luogo: e in generale sarà tanto più piccola l' aberrazione quanto c è più grande di c', dunque 1°. l' aberrazio-

FIG. 53. ne fa avanzar l' oggetto H in H' nella direzione stessa dell' occhio; e tanto la sua direzione bd quanto i raggi Hd, $H'd$ diretto e apparente dell' oggetto, sono in un medesimo piano: 2°. la parallela IP che può chiamarsi l' *aberrazion lineare* è sempre eguale allo spazio bd trascorso dall' occhio mentre la luce trascorre Id: 3°. se l' oggetto è immobile in H', l' occhio venendo in d lo vedrà nella direzione df e l' aberrazion lineare sarà parimente $Pf = bd$; ma se l' occhio riferisce l' aberrazione a una sfera Phg, di cui gli sembri d' esser nel centro d, l' oggetto gli comparirà in h, e la quantità dell' aberrazione sarà $Ph < Pf$: 4°. prolungata bd in t, si conduca Pt normale a dt e si chiami l l' angolo Pdt; e poichè Ph si confonde colla tangente, sarà retto l' angolo fhP, come pure hPd, onde $fPh = tPd$, e quindi per i triangoli simili fPh, dPt si avrà (fatto $Pf = m$) l' aberrazione angolare $Ph = Pdh = m \operatorname{sen} l$: 5°. che se l' occhio venga da t verso d collo stesso moto, H' aberrerà nella parte opposta, e l' aberrazione sarà egualmente $m \operatorname{sen} l$; se non che la distanza angolare di H' dal piano dt che prima diminuiva, ora si aumenta.

54. 2ª. 462. Ma descriva l' occhio un' orbita circolare o almeno poco diversa dal circolo, e sia A un corpo immobile luminoso riferito a una sfera immensa, di modo che le rette che partono parallele da qualunque punto dell' orbita, coincidano sensibilmente nel punto stesso. Sia S il centro visibile del moto, ed E il punto da cui S ed A compariscono all' occhio in uno stesso piano ESA verticale, a cui han da riferirsi i cangiamenti di aberrazione. Se l' occhio in un tempo t percorrerà $TR = m$ che suppongo uno spazio assai piccolo, il corpo A sembrerà avanzato per uno spazio $Ar = TR$ nella direzione medesima. Conduco RQ parallela ad ES, HTQ normale ad ambedue, e da A ed r le Aq, rq parallele ed eguali a TQ, RQ. L' aberrazion lineare $Ar = RQ$ si risolverà dunque in Aq, qr ($=$ TQ, QR) (99) ed Aq esprimerà lo scostamento o avvicinamento di A al piano verticale ESA, mentre qr ($=$ QR) esprime la depressione di

A verso il piano ERC. Fatto ora come sopra (460) $EST = e$, $SE = ST = r$, i due triangoli simili TSH, TRQ daranno $QR = m \operatorname{sen} e$, $TQ = m \cos e$; quindi si avranno le quantità angolari di aberrazione in qr, Aq: poichè 1°. dalla retta qr avrò l' *aberrazione di latitudine* $= qr \operatorname{sen} l$ (461: 4°) $= m \operatorname{sen} e \operatorname{sen} l$: 2°. considerata la retta Aq come un piccol arco di cerchio massimo che sia base d' un triangolo sferico il cui vertice è nel polo P della sfera, l' angolo in P o sia l' arco che gli corrisponde sul piano ETC (L. 738) sarà $\frac{Aq}{\cos l}$ (L. 842) $= \frac{m \cos e}{\cos l}$ *aberrazione di longitudine* che sarà positiva finchè $e < 90°$, o $> 270°$, e negativa per il rimanente del circolo.

Fatto $\frac{m \cos e}{\cos l} = x$ ed $m \operatorname{sen} l \operatorname{sen} e = y$ si avrebbe la stessa equazione all' ellisse, che si trovò per la parallasse (460).

Che se A non sia immobile, nè la sua distanza infinita, l' occhio attribuirà all' oggetto la differenza o la somma dei moti dell' oggetto e suo proprio, secondochè le lor direzioni son cospiranti o contrarie (459). Contuttociò per aver l' effetto dell' aberrazione si supporrà l' oggetto immobile, trasferendo tutto il moto relativo nel solo occhio; quindi chiamato m questo moto corrispondente ad un dato tempo, per esempio a 24^{or}, e sapendosi dalle osservazioni astronomiche che la luce viene dal sole a noi in $8' \, 7'' = 487''$, si dirà 1°. la distanza media dal Sole a noi ($= r = 1$): alla distanza d dell' oggetto (calcolata in parti del raggio r) : : $487'' : \frac{487 \times d}{r}$, tempo che impiega la luce nello spazio d: 2°. 24^{or} ($= 1440'$): m : : $487d : \frac{487 . d . m}{1440}$ espressione in secondi dell' aberrazione dell' oggetto, che chiamata a darà $la = ld + lm + 9{,}5291665$.

463. L' ultimo effetto del moto rettilineo della luce son l' *ombre*. In fatti propagandosi i raggi lucidi in linea retta,

FIG.

e l' opacità dei corpi essendo per quelli un ostacolo (440), gli intervalli che al di là del corpo opaco corrispondono alla direzione dei raggi impediti, resteranno privi di luce e quindi occupati dall'ombra (433), la quale perciò si moverà sempre contrariamente al moto del corpo lucido, e sarà tanto più forte quanto è più viva la luce che ne rischiara le vicinanze: onde quanti saranno i corpi lucidi dalla parte medesima del corpo opaco, tante ombre differenti gli si vedranno all' intorno, delle quali la più sensibile sarà necessariamente verso il suo piede ove non giunge alcun raggio.

54. 1ª. Segue da ciò che un corpo lucido di un qualunque anche piccolo diametro IN potendosi riguardare come un aggregato di molti lumi, oltre l' *ombra vera* AB prodotta dietro al corpo opaco AH e terminata dal raggio estremo superiore IHB, genera una diminuzion di luce o *penombra* BL contigua all' ombra vera AB e terminata dall' estremo raggio inferiore NHL; poichè in L cominciandosi a perdere i raggi N e continuando la perdita fino in B ove tutti mancano, è chiaro che scema la luce, e cresce perciò la penombra da L a B.

464. Per determinar primieramente le proprietà dell' ombra $AB = x$, sia $AH = h$ l' altezza del corpo opaco ed $ABH = a$ l' angolo o *altezza apparente del lembo* superiore I del corpo lucido, e supposta AB orizzontale ed AH verticale, si avrà al solito $x = h \cot a = \frac{h}{\tang a}$.

Onde 1°. se $a = 45°$ sarà $\tang a = 1$ ed $x = h$, cioè se l' altezza apparente del corpo lucido faccia un angolo semiretto, la lunghezza dell' ombra eguaglierà l' altezza del corpo opaco: 2°. per un' altra altezza a' del lembo I avremo un' altr' ombra $x' = \frac{h}{\tang a'}$, ed $x : x' :: \tang a' : \tang a$, cioè le lunghezze dell' ombra d' uno stesso corpo opaco sono in ragione inversa delle tangenti dell' altezza apparente del lembo superiore I: 3°. poichè scemando l' angolo a scema anche la sua tangente (L. 692) e perciò cresce il valor di $\frac{h}{\tang a}$ (L. 48), l' ombra si aumenterà non solo per l' aumento di h ma anche per la diminuzione dell' altezza apparente ABH del lembo superiore I, e reciprocamente: 4°. poichè $HA : AB :: h : \frac{h}{\tang a} :: \tang a : 1 :: \sen a : \cos a$ (L. 699) *l' altezza del corpo opaco alla lunghezza dell' ombra starà come il seno dell' altezza del corpo lucido al suo coseno.*

FIG. 54. 1ª.

465. Ma oltre l' ombra AB gettata sopra un piano orizzontale dal corpo verticale AH la quale dicesi *ombra retta*, si può anche considerar *l' ombra versa* FH che la lunghezza orizzontale del corpo opaco FP getta sopra un piano verticale FA; dunque 1°. se uno stesso punto lucido I produca le due ombre FH, AB, i triangoli simili PFH, BAH ci daranno $HF : FP :: HA : AB :: \sen a : \cos a$ (464) cioè *l' ombra versa alla lunghezza del corpo opaco sta come il seno dell' altezza del corpo lucido al suo coseno*: 2°. perciò se sia $\sen a = \cos a$ ovvero $\tang a = 1$ onde $a = 45°$, si avrà $HF = FP$, cioè qualora l' altezza del corpo lucido sia = 45°, anche l' ombra versa eguaglierà, come la retta (464), la lunghezza del suo corpo opaco: 3°. e se il corpo opaco PF eguagli l' altro HA, l' altezza dell' opaco HA sarà media proporzionale tralle sue ombre retta e versa: 4°. Perciò supposta $PF = HA$, sarà $AB = \frac{HA \cos a}{\sen a}$, $FH = \frac{PF \sen a}{\cos a}$ ed $AB : FH :: \cos^2 a : \sen^2 a$, cioè *l' ombra retta starà alla versa in ragion duplicata del coseno al seno dell' altezza del corpo lucido* IN.

466. Quanto alla penombra BL, sia come sopra $AH = h$, $ABH = a$ ed inoltre $ALH = b$ e $BHL = a - b$ (L. 511) $= c$; si avrà dunque $AL = h \cot b$, onde $BL = AL - AB = h(\cot b - \cot a) = \frac{h \sen (a - b)}{\sen a \sen b}$ (L. 709) $= \frac{h \sen c}{\sen a \sen b}$: ma questo rotto è tanto più grande quanto è minore o l' angolo $a = ABH$, o l' angolo $b = ALH$, e quanto è maggiore

FIG. 54. 1ª. o l'altezza del corpo opaco $h = AH$, o l'angolo $c = BHL$ misura del diametro apparente IN dell' oggetto lucido; dunque *la penombra sarà tanto più estesa quanto è più alto il corpo opaco AH, quanto è più vasto o più vicino il corpo lucido IN, e quanto è meno elevato sull' orizzonte*.

467. Siano infine IKN, CVD i circoli massimi di due globi, l' uno opaco e l' altro lucido con le comuni tangenti CI, DN; e poichè il moto della luce è rettilineo, e CI, DN cadono interamente fuori dei circoli (L. 496), niun raggio che parta di là da C, D potrà incontrare il globo opaco IKN: cosicchè la parte illuminante CVD e l' illuminata IKN son determinate dalle tangenti CI, DN. Condotta dunque MG per i centri dei globi ed ME parallela ad IC, MG dividerà in mezzo gli archi IKN, CVD, onde basterà esaminare i soli archi IK, CV. Sia la distanza dei centri $MG = d$, il raggio del globo lucido $GC = l$, dell' opaco o tenebroso $MI = t$ e l'angolo $IMK = x$; sarà $GE = l - t$ e l' angolo $CGV = 180° - x$ (L. 500) onde (L. 750) $MG = d = \frac{l-t}{\cos(180° - x)}$, cioè (L. 704, 692) $d = \frac{l-t}{-\cos x}$, $\cos x = \frac{t-l}{d}$, e $\operatorname{sen} x \sqrt{\left(1 - \left(\frac{t-l}{d}\right)^2\right)}$.

468. Dunque 1°. se $t > l$, $\cos x$ sarà positivo e quindi (L. 691) $x\ (= IMK) < 90°$ e $180° - x\ (= CGV) > 90°$, cioè per illuminare men della metà dell' opaco vi vorrà più della metà del lucido: se $t = l$, $\cos x = \frac{0}{d} = 0$ onde (L. 692) $x = 90°$ e $180° - x = 90°$, cioè per illuminar la metà dell' opaco basterà la metà del lucido: e se $t < l$, $\cos x$ sarà negativo e quindi (L. 691) $x > 90°$ e $180° - x < 90°$, cioè per illuminare più della metà dell' opaco basterà men della metà del lucido.

469. Dunque 2°. poichè $\frac{t-l}{d}$ è tanto più grande quanto d è più piccolo, e reciprocamente (L. 48), se scemi la distanza

distanza GM e sia $t > l$, crescerà $\cos x$ positivo, scemerà FIG. 54. 1ª.
x (L. 692) e crescerà $180° - x$, cioè vi vorrà una parte del globo lucido sempre più grande per illuminare una parte dell' opaco sempre più piccola; che se sia $t < l$, crescerà $\cos x$ negativo, crescerà x (L. 692) e scemerà $180° - x$, cioè una parte del lucido sempre più piccola basterà per illuminare una parte dell' opaco sempre più grande. Quando cresca la distanza GM, avverrà tutto all' opposto.

470. Dunque 3°. poichè quando $t > l$ si ha $x < 90°$ (468), sarà $IMH > 90°$ ed $IMH + MIH > 180°$; dunque le rette MH, IH divergeranno e l' ombra del globo opaco, determinata dalle tangenti CI, DN, avrà la forma d' un cono troncato inverso; se $t = l$ sarà $IMH + MIH = 180°$ e le rette MH, IH saranno parallele (L. 500), onde l' ombra avrà la forma d' un cilindro; e se $t < l$, sarà $IMH + MIH < 180°$ e le rette MH, IH convergeranno, onde l' ombra avrà la forma d' un cono.

471. Dunque 4°. poichè in quest' ultimo caso $CE\ (t) : EG\ (l-t) :: HM : MG\ (d)$, sarà la lunghezza del cono ombroso $HM = \frac{dt}{l-t}$.

472. Condotta CMT, se sia l' angolo $MCI = p$ e GMC (semidiametro apparente del corpo lucido) $= r$, l' angolo CHD del cono ombroso sarà $= 2\,CHG =$ (L. 511) $2(r - p)$: onde se cerchisi la semisezione QZ del cono per un punto Q di nota distanza $MQ = h$ e sia $MI = g$, $MQI = p'$, sarà $\operatorname{sen} p' = \frac{g}{h}$ (L. 745), e $QMZ = z$ semidiametro cercato sarà $= MQC - GHC = p' + p - r$. Se si volesse la sezione in Q', date le stesse denominazioni, si avrebbe $z' = Q'MG = MQ'H + Q'HG = p' - p + r$.

Luce Riflessa.

473. Sia Pp la densità della luce allorchè penetra il primo strato DC del mezzo uniforme DA; sia Cc la sua densi- 52.

FIG. 52. tà quando penetra l' altro strato EB ec., e poichè queste ordinate decrescono in progression geometrica (444), la curva *pcba* che passa per le loro estremità sarà una logaritmica (L. 944) in cui posto il modulo o la suttangente $= A$, la densità nota $Pp = b$, l' ascissa corrispondente $AP = c$, la densità ignota $Cc = y$, la corrispondente ascissa $AC = c - x$, si avrà la grossezza degli strati eguali $PC = x$, e per la natura della curva (L. 944) $c = Alb$, e $c - x = Aly$ dalle quali equazioni viene $A = \frac{x}{lb - ly}$ e $ly = lb - \frac{x}{A}$. Quindi benchè l' asintoto PA (L. 944) ci dimostri che l' ordinate o densità *Bb*, *Aa* ec. non son ridotte a zero fuorchè nell' infinito (L. 872), e che perciò non si dà corpo alcuno assolutamente opaco, nondimeno crescendo il numero degli strati DC, EB ec., l' ordinate o densità s' impiccoliscon tanto che i raggi divengon ben presto insensibili e il mezzo perde ogni carattere di trasparenza. Sapendosi in fatti che 16 laminette di vetro la cui grossezza totale era di $9^{lin}, 5$ non dettero adito che ad $\frac{1}{240}$ di luce, mentre 80 simili laminette con una grossezza di $47^{lin}, 5$ produssero una perfetta opacità, se nella formula $A = \frac{x}{lb - ly}$ si ponga $Pp = b = 240$, $Cc = y = 1$, $PC = x = 9, 5$, si avrà $A = \frac{9,5}{l\,240} = \frac{9,5}{5,4806389}$ (per esser qui iperbolico il logaritmo) $= 1, 7333$; e se nell' altra formula $ly = lb - \frac{x}{A}$ si faccia $x = 47, 5$, avremo $ly = l\,240 - \frac{47,5}{A} = l\,240 - 5l240 = -4l240 = -l240^4 = l\frac{1}{240^4}$, onde $y = \frac{1}{240^4} = 0,000\,000\,000\,301$; perciò quando l' ordinata o densità sarà ridotta ad $y = \frac{301}{1000000000000}$, il corpo si potrà chiama-

re opaco e il raggio HD non potendo vincer l' ostacolo, sarà costretto per la più gran parte a riflettersi; dal che potremo inferire che *non vi è riflessione disgiunta da refrazione, nè refrazione separata da riflessione*. Intanto dobbiam distinguer due classi di corpi opachi: gli uni hanno le superficie ineguali e mal pulite, come gli alberi, le muraglie, i monti ec.; gli altri le hanno levigate ed eguali come i cristalli, i metalli bruniti ec. I primi rigettando i raggi d' un oggetto luminoso o illuminato, gli dividono, gli sparpagliano e gli riflettono in tutte le direzioni: onde guastate e disperse dalla riflessione irregolare l' immagini degli oggetti, giunge all' occhio la sola immagine del corpo opaco. All' incontro i secondi respingendo quei raggi con l' ordine e con la mescolanza stessa che ebbero nel partir dall' oggetto, non solo dipingono nell' occhio se stessi, ma conservano anche alle immagini degli altri oggetti la loro essenza, inviandole all' occhio ora con le dimensioni naturali, ora con qualche aumento o diminuzione, ed ora con delle bizzarre ma sempre uniformi e sempre ordinate trasformazioni. La teorìa della luce riflessa non ha luogo che nella seconda classe dei corpi opachi. FIG. 50.

474. Dato pertanto uno specchio concavo qualunque MO e nel suo asse ΦO un corpo lucido Φ, è facile di assegnare nell' asse medesimo il punto o *fuoco* f ove la riunione dei raggi riflessi produce l' immagine dell' oggetto. Poichè se sia ΦM un raggio incidente vicinissimo a ΦO, condotta Mf al fuoco cercato f e alzata da M la normale o raggio MC di curvatura (L. 1032, 1033), la piccolezza dell' arco MO darà $\Phi O = y = \Phi M$, $CO = r = CM$, $fO = x = fM$, onde $\Phi C = y - r$ e $Cf = r - x$; ma per essere MC normale in M, l' angolo d' incidenza ΦMC deve eguagliare l' angolo di riflessione fMC (440); dunque (L. 557) $\Phi C\ (y - r) : Cf\ (r - x) :: \Phi M\ (y) : Mf\ (x)$ e la *lunghezza focale* $fO = x = \frac{ry}{2y - r}$, formula generale che determina le proprietà 55.

FIG tutte del fuoco in uno specchio qualunque o piano o concavo o convesso come tra poco dimostreremo.

475. Si osservi frattanto 1°. che $\Phi O = y$, $CO = r$, $fO = x$
55. son sempre in proporzione armonica, cioè $y : x :: y - r : r - x$, il che è evidente: 2°. che nascendo la formula dalle supposizioni di $\Phi O = \Phi M$, $CO = CM$, $fO = fM$, i soli raggi incidenti ΦM vicinissimi a ΦO costituiscono negli specchi curvilinei il fuoco f; gli altri taglian l'asse in punti tanto più distanti da f quanto M è più remoto da O, cosicchè non è possibile che uno specchio di questa specie rifletta in un sol punto f tutti i raggi venuti in esso da un punto qualunque indeterminato Φ; per altro la densità della luce essendo estremamente più grande in f che altrove, il fuoco f dei raggi che cadono quasi normalmente sulla superficie MO, può considerarsi come un vero punto fisico ove si forma la distinta immagine dell'oggetto Φ: 3°. che trovandosi il fuoco f nei soli assi ΦO, l'immagine d'un oggetto Φ è sempre in una retta che passa per Φ e per il centro C, onde un occhio che voglia vedersi, diverrà egli medesimo l'oggetto lucido Φ e non otterrà l'intento se il suo raggio visuale non passi per il centro C.

476. Ciò supposto, esaminiamo primieramente le proprietà degli specchi piani. Poichè le curvature sono in ragione inversa dei loro raggi (L. 596), la curvatura zero dello specchio piano avrà un raggio infinito, e perciò nella formula generale $x = \frac{ry}{2y - r}$ (474) bisognerà fare $r = \infty$, il che dà la particolar formula per gli specchi piani $x = \frac{\infty y}{2y - \infty} = \frac{\infty y}{-\infty} = -y$, cioè *la distanza* fG *dell'immagine*
56. f *dallo specchio* MOG *è negativa ed eguale alla distanza* ΦG *dell'oggetto* Φ *dallo specchio medesimo, onde quanto l'uno è al di quà di esso, tanto l'altra ne comparisce al di là.*

477. Dunque 1°. l'immagine f è nel prolungamento della normale ΦG condotta da Φ sullo specchio; poichè do-

 FIG. 56.

vendosi trovar l'immagine in una retta che passa per Φ e per il centro dello specchio (475), questa retta sarà necessariamente la normale ΦG (L. 596): perciò ΦG, fG non solo sono eguali (476), ma formano anche una stessa retta Φf.

478. Dunque 2°. *lo specchio piano riflette i raggi con la loro natural divergenza* (442); poichè il punto Φ dovendo vedersi non solo nella direzione EO dei raggi visuali ma anche nel vertice f del cono lucido Ef (447) ciascun raggio ΦO, a cagione di $fG = \Phi G$ (476, 477) eguaglierà il suo corrispondente fO (L. 524) ed il cono $O\Phi$ sarà simile ed eguale al cono Of, onde OE sarà non meno la continuazione di Of che di $O\Phi$ e la riflessione non accrescerà nè diminuirà la divergenza dei raggi.

479. Dunque 3°. *l'immagine è simile ed eguale all'oggetto*; poichè conservandosi nella riflessione la natural divergenza dei raggi (478), l'angolo ottico formato in E dai raggi estremi dell'immagine fB eguaglia l'angolo ottico che farebbero in e i raggi estremi dell'oggetto ΦB, onde $fB = \Phi B$ (449).

480. Dunque 4°. essendo $\Phi G = fG$ (476), $\Phi B = fB$ (479) e gli angoli in G retti (477), sarà anche $\Phi BG = fBG$ (L. 524), cioè l'angolo ΦBf fatto dall'oggetto ΦB e dall'immagine fB è sempre doppio dell'angolo ΦBG fatto dall'oggetto ΦB e dallo specchio MG; onde se collocato lo specchio orizzontalmente, l'oggetto sia verticale, sarà $\Phi BG = 90°$ e $\Phi Bf = 180°$, cioè l'immagine sarà diametralmente opposta all'oggetto; se lo specchio s'inclini finchè sia $\Phi BG = 45°$, sarà $\Phi Bf = 90°$, cioè l'immagine dell'oggetto verticale comparirà orizzontale; e se lo specchio s'alzi interamente onde divenga parallelo all'oggetto, sarà $\Phi BG = 0°$. e $\Phi Bf = 2 \times 0° = 0$, cioè anche l'immagine gli diverrà parallela.

481. Dunque 5°. il moto dell'immagine è sempre doppio del moto dello specchio, poichè se dal parallelismo ove $\Phi BG = 0°$ e $\Phi Bf = 0°$ (480), passi lo specchio ad un'inclinazione $\Phi BG = 45°$, si troverà $\Phi Bf = 90°$ (480) onde men-

FIG. 56. tre lo specchio da 0° scende a 45°, l'immagine corre da 0° a 90°; e se dai 45° passi lo specchio ai 90°, si trova $\Phi Bf = 180°$ (480), onde mentre lo specchio da 0° va a 90°, l'immagine va da 0° a 180° ec.

482. Dunque 6°. se da un punto qualunque P dell'oggetto CD parallelo allo specchio si conducano i raggi Pc, Pd all'estremità dell'immagine, sarà NM la porzion dello specchio occupata da lei: ma $NM : cd :: PN : Pc$ (L. 553) e

$$PN = Nc\ (476) = \frac{Pc}{2}\text{; dunque anche } NM = \frac{cd}{2} = \frac{CD}{2}$$

(479), cioè l'immagine occupa una porzion di specchio eguale per tutti i lati alla metà dell'oggetto; onde niuno potrà vedersi intieramente in uno specchio parallelo, o vi si avvicini o se ne allontani, quando lo specchio non abbia almeno la metà delle sue dimensioni, perchè anche l'immagine vi si avvicina o se ne allontana egualmente (476).

57. 483. Dunque 7°. posto l'occhio I e l'oggetto O nell'angolo ABC dei due specchi AB, BC e condotta da O a BC la normale OD onde sia $OE = ED$, l'occhio I vedrà primieramente l'oggetto in D; poichè se da I si conduca la retta ID, e da F ove ella incontra lo specchio, la retta OF, sarà l'angolo $OFE = DFE = IFB$ e perciò anche l'angolo d'incidenza OFZ eguale a quello di riflessione IFZ; similmente se dall'immagine D che ora diventa oggetto, si conduca all'altro specchio BA la normale DH onde $DG = GH$, l'occhio I per la stessa ragione vedrà nuovamente in H l'oggetto O; così se da H si conduca a BC (prolungata occorrendo) la normale HL onde $HM = LM$, lo vedrà nuovamente in L, e se da L ad AB prolungata si conduca la normale LR onde $LQ = QR$, lo vedrà per la quarta volta in R ec. e non cesserà di vederlo finchè l'una o l'altra delle due rette RI, LI condotte dall'immagine all'occhio, non tagli lo specchio fuor dell'angolo ABC, come è chiaro. E giacchè l'oggetto O si dipinge egualmente e in D nello specchio BC, ed in K nello specchio BA, nascerà dall'immagi-

ne K una una nuova serie d'immagni simile a quella che FIG. 57.
nasce dall'immagine D.

484. Dal che si raccoglie 1°. che essendo per esempio $IR = IN + NR$, $NR = NL = NS + SL$, $SL = SH = ST + TH$, $TH = TD = TV + VD$, $VD = VO$, e quindi $IR = OV + VT + TS + SN + NI$, la distanza d'un'immagine qualunque R dall'occhio I eguaglia la somma dei raggi incidente e riflessi per cui è veduta: 2°. che perciò l'immagine è tanto più lontana quanto più si moltiplica, e attesa la decrescente densità della luce (443), è tanto più languida quanto più lontana: 3°. che crescendo l'angolo ABC, scema il numero delle immagini; perchè gli angoli EDH, DHL ec. fatti dalle normali OD, DH, HL ec. eguagliando l'angolo ABC (L. 521), al crescer di questo cresce anche la distanza di quelle tra loro, e si giunge più presto a quella retta che tagliando lo specchio fuor dell'angolo ABC, dà fine alle immagini (483): 4°. che se gli specchi son paralleli, il numero delle immagini, l'une però sempre men vive dell'altre, è infinito, perchè tutte si formano in una stessa normale OD prolungata indefinitamente.

485. Passo agli specchi concavi e convessi. Già per i concavi si trovò la formula $x = \frac{ry}{2y - r}$ (474) che facilmente si adatta ai convessi sol che si faccia r negativa, giacchè in questi il raggio di curvatura è nella parte opposta al raggio incidente $\Phi'O$: si avrà dunque $x = \frac{-yr}{2y + r}$, e la for- 55.
mula generale per gli specchi concavi e convessi sarà $x = \frac{\pm ry}{2y \mp r}$, cioè nei concavi il fuoco o immagine f può essere al di quà o al di là dello specchio, secondo che $2y$ è maggiore o minor di r: ma nei convessi, qualunque sia il valor di $2y$, si avrà sempre x negativa, e il fuoco o immagine f sarà sempre al di là dello specchio.

486. E quì una volta per sempre si osservi che il fuoco

FIG. 55.

nè in uno specchio MO nè in una lente BI (*fig.* 63) può mai esser *reale* quando si trova nell' uno dalla parte opposta, nell' altra dalla parte medesima del punto lucido Φ; poichè i raggi per andare al fuoco dovrebbero o attraversar lo specchio ad onta della sua opacità, e non si avrebbe più riflessione; o non attraversar la lente ad onta della sua trasparenza, e non si avrebbe più refrazione. Il fuoco in questo caso è dunque *immaginario*, cioè i raggi o riflettendosi nello specchio o rifrangendosi nella lente divergono in guisa che prolungati si riunirebbero in quel fuoco, e l' occhio ricevendogli così divergenti, gli riferisce a quel punto (447).

487. Dunque 1°. fatto $y = \infty$, ovvero supposto che il punto raggiante Φ o Φ' sia infinitamente lontano dallo specchio onde i raggi ΦO, ΦM, $\Phi' O$, $\Phi' M$ cadano sensibilmente paralleli sopra di lui (L. 596), si avrà $FO = x = \frac{\pm \infty r}{2\infty \mp r}$ $= \frac{\pm \infty r}{2\infty} = \frac{\pm r}{2} = CF$, cioè *la distanza dell' immagine dallo specchio o concavo o convesso eguaglia la metà del raggio osculatore*. Pertanto in un circolo o sfera, ove questo raggio $r = n$ (L. 1037), il fuoco dei raggi paralleli è distante dal vertice della metà della normale o semiasse della sfera medesima; in una parabola o conoide parabolico, ove $r = \frac{p}{2}$ (L. 1037), il fuoco è distante dal vertice d' un quarto del parametro (L. 883); e nel modo stesso, trovato il raggio osculatore, si determinerebbe il fuoco in ogni altra curva. Ma si noti la differenza considerabile tra l' altre curve e la parabola: in quelle pochissimi sono i raggi paralleli che si riuniscano in un sol punto F (475), in questa son tutti (L. 886); onde gli specchi parabolici sarebbero i più atti a riflettere i raggi paralleli o del Sole o d' un oggetto lucido distante almeno di 180 tese (442), se la difficoltà di fabbricargli con esattezza, non avesse data la

ta la

FIG. 55.

ta la preferenza agli sferici, dei quali soli perciò intendiamo di parlare in seguito.

Il fuoco F prodotto dai raggi paralleli dicesi *fuoco principale*; e la distanza FO del fuoco principale F dal vertice O dello specchio, chiamasi *lunghezza focale principale*.

488. Dunque 2°. se $y = \frac{1}{\infty}$ ovvero supposto che Φ o Φ' sia infinitamente vicino allo specchio, si avrà $x = \frac{\pm r}{\infty\left(\frac{2}{\infty} \mp r\right)}$ $= \frac{\pm r}{2 \mp \infty r} = \frac{-1}{\infty}$, cioè l' immagine f sarà sulla superficie stessa dello specchio MO, nel concavo in certo modo sulla convessa, e nel convesso sulla concava.

489. Quindi se la distanza dell' oggetto si esprima in parti del raggio r, e si faccia $y = mr$, avremo per gli specchi concavi $x = \frac{mr}{2m-1}$; onde 1°. se $m < \frac{1}{2}$, sarà $2m < 1$ ed x negativa, cioè il fuoco sarà dalla parte opposta, lungo $O\Phi'$, allontanandosi dallo specchio al crescer di m; 2°. se $m = \frac{1}{2}$, si avrà $2m = 1$ ed $x = \infty$, onde posto l' oggetto nel fuoco principale F, i raggi riflessi son paralleli; 3°. se $m > \frac{1}{2}$, sarà $2m > 1$ ed x positiva: ove si osservi che m può esser < 1, $= 1$ e > 1; perciò quando $m < 1$ (cioè l' oggetto è più discosto della metà del raggio ma più vicino del centro) $m - 1$ è quantità negativa, e quindi $2m - 1$ $(= m + m - 1)$ $< m$, ed $x \left(= \frac{mr}{2m-1}\right) > \frac{mr}{m}$ (L. 48. 1°.) onde $x > r$; quando $m = 1$ (cioè l' oggetto è nel centro) $x = r$; e quando $m > 1$ (cioè l' oggetto è più lontano del centro) $m - 1$ è quantità positiva e $2m - 1$ $(= m + m - 1) > m$, onde x $\left(= \frac{mr}{2m-1}\right) < \frac{mr}{m}$ e $> \frac{mr}{2m}$ (L. 48. 1°.), cioè $< r$ e $>$

FIG. 55. $\frac{r}{2}$, e il fuoco sarà sempre tra F e C; 4°. finalmente se $m=\infty$, $x=\frac{r}{2}$ come si sapeva (487).

490. La stessa supposizione darà nelli specchi convessi $x=\frac{-mr}{2m+1}=\frac{-r}{2+\frac{1}{m}}$, onde qualunque valore abbia m, x è sempre negativa e il fuoco dei raggi che partono da Φ' è nella parte interna cioè immaginario (486.); quindi 1°. se $m<\frac{1}{2}$, sarà $\frac{1}{m}>2$, e $2+\frac{1}{m}>4$, onde (non attendendo più al segno) $x<\frac{r}{4}$ (L. 48. 1°.); 2°. se $m=\frac{1}{2}$, sarà $2m=1$ ed $x=\frac{r}{4}$; 3°. se $m>\frac{1}{2}$, sarà $\frac{1}{m}<2$, e $2+\frac{1}{m}<4$, onde $x>\frac{r}{4}$; ove essendo $m=1$, si ha $x=\frac{r}{3}$; ed essendo $m>1$, cioè $\frac{1}{m}<1$ (e perciò $2+\frac{1}{m}<3$ e >2), viene $x>\frac{r}{3}$ e $<\frac{r}{2}$; 4°. infine se $m=\infty$, si ha $x=\frac{r}{2}$ come sopra (487.).

491. Dal che generalmente si vede che negli specchi concavi scostandosi l'oggetto Φ dallo specchio d'un solo semiraggio OF, l'immagine f se ne allontana per la parte opposta (485) da zero fino all'infinito (488. 489.); continuando a scostarsi l'oggetto Φ d'un altro semiraggio FC, l'immagine f torna dall'infinito e per la parte stessa si accosta allo specchio fino al centro C (489): e se lo scostamento dell'oggetto Φ prosegue al di là del centro, l'immagine f scende da C verso F e non vi giunge che quando ne è infinitamente distante. Ma negli specchi convessi se l'oggetto Φ' si scosti delle medesime quantità dallo specchio, l'immagine f sempre dalla parte opposta (485) primieramente se ne allontana da zero (488) fino al quarto del raggio (490), poi dal quarto fino al terzo, e infine dal terzo fino alla metà.

492. Se l'oggetto A sia fuori dell'asse ΦO ma in modo che A, B sieno egualmente distanti dallo specchio, condotto da A per il centro C l'asse AM, la sua immagine a darà $aM=x=\frac{\pm ry}{2y\mp r}$, $bO=x'=\frac{\pm r'y'}{2y'\mp r'}$ (485) ec.: ma $y=AM$, $y'=BO$ ec. perchè tutte queste linee passano per il centro C e appartengono agli assi degli specchi (474); di più $AM=BO$ per ipotesi e $CM=r=CO=r'$; dunque $x=x'$ ed $aM=bO$ ec., cioè anche le immagini a, b saranno egualmente distanti dallo specchio MO, il quale se sia concavo mostrerà diritta l'immagine ab quando l'oggetto e l'immagine siano dalla stessa parte del centro C, e la mostrerà roversciata se il centro C sia tra l'uno e l'altra, perchè le immagini dei punti A, B dovendo necessariamente passar per C (475) vi si segano e vanno nei punti opposti a, b. E' chiaro che questo raziocinio si applica rigorosamente a tutti i punti di AB se AB sia un arco concentrico allo specchio, e prossimamente se AB ne sia la corda; onde l'immagine ab è presso a poco simile all'oggetto AB, e per aver la posizione dell'intera immagine d'un oggetto basta calcolar quella del suo punto b nell'asse. Ora i triangoli isosceli e simili ABC, abC danno $AB:ab::CB:Cb::BO\mp CO:CO-bO$, ovvero (fatto negativo il raggio negli specchi convessi (485)) $AB:ab::y\mp r:\pm r-x::y\pm r:\pm r\mp\frac{ry}{2y\mp r}::y:\frac{\pm ry}{2y\mp r}$; dunque *le grandezze dell'oggetto e dell'immagine stanno come le lor distanze* y, $\frac{\pm ry}{2y\mp r}$ *cioè* y, x *dallo specchio*. FIG. 55.

Gli Ottici più precisi dimostrano che l'immagine d'un oggetto rettilineo è una porzione or di parabola or d'ellisse or d'iperbola ed or di circolo: ciò per altro non interessa punto l'uso ordinario degli specchi.

493. Osserveremo per ultimo che fin quì abbiam sempre supposti divergenti i raggi ΦO, ΦM: ma qualora o per natura o per arte ΦO, DM, Φ'O, D'M fossero convergenti, è chiaro che ΦO, DM e Φ'O, D'M posson considerarsi nello specchio concavo come venuti da Φ' e nel convesso da C ove anderebbero a riunirsi; onde poichè Φ', C son dalla

FIG. parte opposta l'uno alla concavità, l'altro alla convessità, nella formula $x = \frac{\pm ry}{2y \mp r}$ (485) bisogna far negativa y e si avrà la lunghezza focale $x = \frac{\mp ry}{-2y \mp r} = \frac{ry}{r \pm 2y}$, nuova formula per i raggi convergenti, dalla quale potranno dedursi delle conseguenze simili a quelle che dalla prima si son dedotte.

494. Osserveremo ancora, che oltre gli specchi piani e sferici, ve ne sono dei prismatici, dei piramidali, dei cilindrici e dei conici: gli uni son composti di più specchi piani o verticali o inclinati; gli altri partecipano dei piani nella loro altezza e degli sferici nella lor larghezza; onde l'immagine d'un oggetto verticalmente presentato ad uno specchio cilindrico verticale, sarà esatta riguardo alle dimensioni verticali (480) e sarà deformata riguardo all'orizzontali (492). Vi son dei metodi pratici dipendenti dalle regole di Prospettiva per delineare in un piano delle figure deformi le cui immagini compariscano regolari in uno specchio conico o cilindrico: ma non ci fermeremo in queste ricerche di sola curiosità.

495. Aggiungiamo piuttosto qualche cosa intorno agli *specchi ustorj*, così detti perchè riunendo i raggi ardenti del Sole verso il fuoco principale F, vi sveglian la fiamma,
58. vi liquefanno i metalli, vi calcinan le pietre ec.; e poichè i soli specchi concavi son capaci di tali effetti, mentre essi soli fanno convergere e riducono in un fuoco reale F i raggi paralleli (435) che gli specchi convessi cangiano in divergenti, sia lo specchio concavo QOI col raggio PQ parallelo all'asse ed ultimo di tutti quelli ch'ei può ricevere: si sa che questo, se sia assai lontano dall'asse ΦO, non anderà al fuoco principale F (475) ma a qualche punto inferiore f di cui si avrà la posizione se si determini qual parte del raggio CO è la retta Ff occupata dai raggi riflessi di tutto lo specchio QOI. Condotto pertanto il raggio o normale QC = CO = 1 e posto l'angolo d'incidenza PQC = CQf

(440) = fCQ (L. 500.) = i, si avrà $fC = \frac{sen\, i}{sen\, 2i}$ (L. 762.) = 58.
$\frac{sen\, i}{2\, sen\, i \cos i}$ (L. 705.) $= \frac{1}{2 \cos i}$, e quindi Ff = fC − CF = $\frac{1}{2 \cos i} - \frac{1}{2}$ (487) $= \frac{1 - \cos i}{2 \cos i} = \frac{sen^2 \frac{1}{2} i}{\cos i}$ (L. 705); onde calcolando questo rotto, sarà nota in parti del raggio CO = 1 la cercata Ff; così se $i = 60°$, sarà (L. 689) F$f = \frac{1}{2}$, cioè il raggio riflesso Qf caderà in O; se $i = 10''$, $= 20''$, $= 30''$ ..... $= 90''$, sarà Ff = 0, cioè il raggio riflesso caderà in F come già si sapeva (475); e se $i = 3°$, verrà $\frac{sen^2 \frac{1}{2} i}{\cos i}$ .... $= 0,000686 = \frac{1}{1458}$, cioè F$f = \frac{1}{1458}$ ec.; di modo che più piccola sarà l'ampiezza o apertura dello specchio, dalla quale Ff dipende, più grande sarà la condensazione dei raggi. Ma siccome per l'opposto col diminuirsi lo specchio scema il numero dei raggi riflessi e perciò anche la loro attività, determiniamo ora fino a qual segno debba estendersi uno specchio sferico onde se ne abbia il massimo effetto possibile.

496. Sieno ΦO, DB i raggi che partono dalle due estremità Φ, D del diametro del Sole; dunque l'immagine dell'una e dell'altra passerà per C (475), l'angolo ΦCD = OCB misurerà il diametro apparente del Sole (451) l'immagine di Φ sarà in F (486), di D in A, ed FA parallela alla corda OB sarà l'immagine del diametro (492). Ora gli effetti dello specchio ustorio sono evidentemente prodotti dall'immagine del Sole ristretta intorno ad AF; onde come tutti i raggi che cadono tra A ed F accrescono questi effetti, così tutti gli altri che passano di là da quei punti sono inutili; la questione è dunque ridotta a trovar l'angolo CQA = QCO = i (495) fatto dal raggio CQ dello specchio e dall'estremo raggio utile QA, ovvero l'angolo AfF = $2i$ (L. 511). E' noto che il diametro apparente del Sole è di 32' in circa; dunque OCB = 32', e poichè OC : CF :: OB : FA ed $\frac{OC}{2}$ = CF

FIG. 58. (486), sarà $FA = \frac{OB}{2} = sen\ 16'$, immaginando sopra OB un raggio normale (L. 758.). Quindi preso per rettangolare il triangolo AFf, giacchè il suo angolo $AFf = 90°, 16'$ (L. 487. 510), avremo $FA = sen\ 16'$, $Ff = \frac{sen^2 \frac{1}{2} i}{cos\ i}$ (495); onde $tang\ AfF = tang\ 2i \left(= \frac{sen\ 2i}{cos\ 2i} \right) = \frac{sen\ 16'\ cos\ i}{sen^2 \frac{1}{2} i}$ (L. 741); quindi $sen\ 16' = \frac{sen\ 2i\ sen^2 \frac{1}{2} i}{cos\ i\ cos\ 2i} = \frac{2\ sen\ i\ sen^2 \frac{1}{2} i}{cos\ 2i}$ (L. 705) equazione che risoluta col metodo delle false posizioni darà $i = 11°, 45'$ in circa (L. 777.); onde poichè non pregiudica il dare allo specchio uno o due gradi di più di quelli che il calcolo assegna, potrà concludersi che *uno specchio sferico produrrà il massimo effetto possibile quando abbia un' ampiezza di 24° o di 25°.*

497. Pertanto tutti gli specchi di 25° avranno una forza eguale, qualunque sia il lor diametro; poichè se per una parte quelli che lo hanno più piccolo come Q′O′I′ ricevono un minor numero di raggi, per l' altra però essendo QI : Q′I′ : : FA : F′A′ (L. 594) gli riuniscono in uno spazio proporzionalmente più piccolo, e si sa che i raggi sono tanto più efficaci quanto più son condensati (443): nondimeno gli specchi maggiori avendo il fuoco ad una distanza più grande dalla superficie, posson produrre alcuni effetti che invano si aspetterebbero dai minori. Del resto gli effetti di due specchi qualunque dipendendo dalle densità d, d' dei raggi che riuniscono, ed avendosi $d = \frac{m}{v}$, $d' = \frac{m'}{v'}$ (10), sarà $d : d' :: \frac{m}{v} : \frac{m'}{v'}$; ma le masse m, m' della luce sono espresse dai circoli di $QN = s$, $Q'N' = s'$ e i volumi v, v' dai circoli di $AF = f$, $A'f' = f'$ (496); dunque $d : d' :: \frac{s^2\pi}{f^2\pi} : \frac{s'^2\pi}{f'^2\pi} :: \frac{s^2}{f^2} : \frac{s'^2}{f'^2}$; e poichè atteso l' angolo costante OCB (496), si ha sempre AF : FC : : A′F′ : F′C ovvero $f : f' :: \frac{r}{2} : \frac{r'}{2}$ (487), sarà finalmente $d : d' :: \frac{s^2}{\frac{1}{4} r^2} : \frac{s'^2}{\frac{1}{4} r'^2}$,

cioè gli effetti degli specchi son proporzionali ai quadrati delle loro ampiezze direttamente e delle lor lunghezze focali principali inversamente. Dal che si vede di nuovo e in generale che gli effetti di due specchi simili qualunque son sempre eguali, mentre in tal caso $s : s' :: r : r'$.

498. Mancando i raggi del Sole, possono aversi dei considerabili effetti anche coi comuni carboni accesi, sol che questi si collochino esattamente nel fuoco principale dello specchio; poichè se i raggi ardenti che allora si riflettono paralleli (489), incontrino in giusta distanza un nuovo specchio, si renderanno al fuoco principale di lui (487) e vi incendieranno delle materie combustibili in proporzione della loro attività.

Luce refratta.

499. Stabilito una volta coll' esperienze più delicate e più certe che la ragion dei seni d' incidenza e di refrazione è costante (439), poco vi è voluto ad esprimerla con dei numeri in cui tutti gli Ottici son convenuti: così se il raggio passi dall' aria A nel vetro comune V, la ragion dei seni d' incidenza A $sen\ i$ e di refrazione V $sen\ r$ è di 31 : 20 ovvero di 3 : 2 prossimamente; se passi dall' aria A nel *Flint* o *Flintglass* F (è questo un celebre cristallo che si fabbrica in Inghilterra) la ragion dei seni A $sen\ i$, F $sen\ r$ è incirca di 8 : 5; e se passi dall' aria A nell' acqua H, la ragion dei seni A $sen\ i$, H $sen\ r$ è in circa di 4 : 3; reciprocamente è di 20 : 31, o di 5 : 8, o di 3 : 4 se passi dal vetro comune o dal flint o dall' acqua nell' aria, e questa reciprocazione si intenda quì avvertita una volta per sempre.

500. Dunque 1°., avendosi A $sen\ i$: V $sen\ r$ :: 31 : 20; A $sen\ i$: F $sen\ r$ :: 8 : 5 :: 31 $\frac{155}{8}$, A $sen\ i$: H $sen\ r$ :: 4 : 3 :: 31 : $\frac{93}{4}$, sarà V $sen\ r$ ovvero (ciò che è lo stesso) V $sen\ i$: F $sen\ r$ :: 20 : $\frac{155}{8}$ :: 32 : 31, ed H $sen\ r$ o H $sen\ i$: V $sen\ r$ :: $\frac{93}{4}$: 20 :: 93 : 80, cioè se il raggio passi dal vetro nel flint, la

FIG. ragion dei seni sarà di 32 : 31, e se passi dall' acqua nel vetro, di 93 : 80 e reciprocamente.

501. Dunque 2°. se I, i sieno due angoli d' incidenza ed R, r i corrispondenti di refrazione, supposti due mezzi qualunque e la ragion dei seni $n:1$, si avrà $sen\ I : sen\ R :: n : 1 :: sen\ i : sen\ r$; onde se $I > i$, sarà anche $R > r$, cioè crescendo o scemando l' incidenza, cresce o scema anche la refrazione.

502 Dunque 3°, se i ed $i + di$ sieno due incidenze pochissimo differenti, ed r, $r + dr$ le corrispondenti refrazioni (501), avremo $sen\ (i + di) : sen\ (r + dr) :: n : 1 :: sen\ i : sen\ r$, cioè (L. 703) $sen\ i \cos di + sen\ di \cos i : sen\ r \cos dr + sen\ dr \cos r$, ovvero (L. 707. II.) $sen\ i + di \cos i : sen\ r + dr \cos r :: sen\ i : sen\ r$, e quindi permutando e sottraendo (L. 258) $di \cos i : sen\ i :: dr \cos r : sen\ r$ onde poi $di : dr :: \frac{sen\ i}{\cos i} : \frac{sen\ r}{\cos r} :: tang\ i : tang\ r$; onde se $tang\ i > tang\ r$, cioè se $i > r$ sarà anche $di > dr$; ma variando i di di ed r di dr, la deviazione δ varia di $d\delta$, e per la natura di quest' angolo (439) si ha $d\delta = di - dr$; dunque poichè $di > dr$ sarà $d\delta$ una quantità positiva, cioè crescendo o scemando l' incidenza, cresce o scema anche la deviazione (L. 996).

503. Dunque 4°. se un raggio di luce HD passi da uno
59. in un altro mezzo uniforme IB terminato dalle superficie parallele IA, KB, chiamate i, i' la prima e seconda incidenza HDE, DCV, ed r, r' le corrispondenti refrazioni LDC, FCG, si avrà $sen\ i : sen\ r :: n : 1$ e $sen\ i' : sen\ r' :: 1 : n$ (499); ma $r = i'$ attese le parallele, e perciò $n\ sen\ r = n\ sen\ i'$; dunque anche $sen\ i = sen\ r'$ ed $i = HDE = r' = GCF$, cioè il raggio *emergente* CG è parallelo all' incidente HD.

504. Dunque 5°. se in un prisma triangolare IAK di
60. vetro l' angolo $i = HDE$ sia piccolissimo, sarà $r = LDC$ an-
e cor più piccolo (499. L. 659.) onde la ragione dei due an-
61. goli non differirà sensibilmente da quella de' loro seni (L. 707.) e si avrà (499.) $i : r :: 3 : 2$, $r = \frac{2i}{3}$, la deviazione

BDC =

FIG.
$BDC = \delta = i - r = \frac{i}{3}$, $ADC = 90° \mp \frac{2i}{3}$, e (fatto l' 60.
angolo *rifrangente* $A = a$) $ACD = 180° - a - ADC = 90°$ e
$\pm \frac{2i}{3} - a$, ed $VCD = i' = 90° - ACD = a \mp \frac{2i}{3}$; dun- 61.
que se anche i' e perciò a da cui i' dipende (L. 600) sieno molto piccoli, nel passaggio dal vetro nell' aria si avrà $i' : r' :: 2 : 3$ (499), $r' = \frac{3i'}{2} = \frac{3a}{2} \mp i$ e la deviazione MCG $= \delta' = r' - i' = \frac{a}{2} \mp \frac{i}{3}$, ovvero essendo $\frac{i}{3}$ negligibile, $\delta' = \frac{a}{2}$: cioè 1°. la deviazione dopo le due refrazioni eguaglierà la metà in circa dell' angolo rifrangente: 2°. poichè $\delta' = \frac{a}{2}$, nello stesso prisma la deviazione δ è invariabile ancorchè varino l' incidenze i, i', purchè sieno sempre assai piccole: 3°. in un altro prisma della stessa materia sarà del pari $\Delta' = \frac{A}{2}$ e perciò $\delta : \Delta' :: \frac{a}{2} : \frac{A}{2} :: a : A$; cioè le deviazioni son proporzionali agli angoli rifrangenti.

505. Ma Newton ha scoperte nei prismi delle proprietà molto più singolari. Introdotto in una camera oscura e ricevuto sulla faccia IA del prisma e normalmente all' asse il
raggio L, vedesi egli dopo le due refrazioni dilatarsi in uno 62.
spettro bislungo *rp* e dividersi in sette specie di raggi diversamente coloriti, cosicchè la prima specie, contando dai più bassi, forma la scala graduata del color *rosso* ed occupa 45 parti di tutta la lunghezza dello spettro diviso in 360, la seconda specie dà la scala del colore *aranciato* e ne occupa 27, la terza dà quella del *giallo* e ne occupa 48, la quarta dà quella del *verde* e ne occupa 60, la quinta dà quella del *celeste* e ne occupa parimente 60, la sesta dà quella del *turchino* e ne occupa 40, la settima ed ultima dà quella del *paonazzo* e ne occupa 80. Se il seno d' incidenza dentro al prisma sia comune a tutte le specie di raggi e si supponga diviso in 50 parti, si trova per esperienza (432) che uscendo i raggi dal prisma nell' aria, il seno di refrazione della scala dei *rossi* va dalle 77 fino alle $77\frac{1}{8}$ di quel-

le parti, della scala degli *aranciati* dalle $77\frac{1}{8}$ fino alle $77\frac{1}{5}$, dei *gialli* dalle $77\frac{1}{5}$ fino alle $77\frac{1}{3}$, dei *verdi* dalle $77\frac{1}{3}$ fino alle $77\frac{1}{2}$, dei *celesti* dalle $77\frac{1}{2}$ fino alle $77\frac{2}{3}$, dei *turchini* dalle $77\frac{2}{3}$ fino alle $77\frac{7}{9}$, dei *paonazzi* fino dalle $77\frac{7}{9}$ fino alle 78.

506. Segue di quì 1°. che la luce è un composto di sette specie di raggi *omogenei* che sono inalterabili; poichè se per un numero qualunque di prismi si faccia nuovamente passare una specie di raggi, per esempio i rossi, questi non si decompongon mai ulteriormente e restano sempre rossi; perciò i colori ottenuti dal prisma diconsi *prismatici* o *primitivi*. La lor mancanza totale dà il *nero*, la lor mescolanza produce un nuovo colore che a proporzione partecipa dei componenti, e l'unione di tutti insieme genera il *bianco*. In fatti se si divida un circolo in sette settori colorati corrispondenti ai sette spazj occupati dai colori nello spettro prismatico (505), e si rivolga velocemente intorno al suo centro, tutta la superficie comparirà quasi bianca o del colore stesso della luce solare: se la bianchezza non è perfetta, dee attribuirsi al difetto di gradazione e all' impurità dei colori artificiali. Del resto la differenza dei colori negli oggetti visibili nasce da quella dei raggi che gli riflettono; l'oro è aranciato, la foglia dell'albero è verde ec. perchè dissipano o assorbiscono tutte le specie di raggi fuorchè gli aranciati e i verdi, o per dir meglio perchè i soli aranciati e verdi riflettuti dall' oro e dalla foglia, fanno nell' organo della vista un' impressione tanto efficace, che l' impressioni più deboli di tutte l' altre specie di raggi divengono insensibili: così l' inchiostro è nero perchè assorbisce tutti i raggi, e il latte è bianco perchè tutti gli ripercuote. Tale è in compendio la teorìa Newtoniana dei colori.

507. 2°. Che crescendo continuamente i seni e perciò anche gli angoli di refrazione dal primo raggio del rosso fino all' ultimo del paonazzo (505), *le sette specie di raggi si rifrangono variamente in un medesimo mezzo, ed i rossi passando per esempio dall' aria nel vetro sono i meno, come i paonazzi sono i più rifrangibili di tutti gli altri*. Pertanto le proporzioni assegnate di sopra (499.500) tra i seni d' incidenza e di refrazione convengono ai soli raggi *medj* o di *media rifrangibilità*, a quelli cioè i cui seni sono medj aritmetici tra i seni dei rossi e i seni dei paonazzi: ma distinguendo ora le tre specie R, M, P dei raggi *rossi*, *medj* o verdi e *paonazzi* che passano dall' aria A nel vetro V o nel flint F o nell' acqua H ec. e reciprocamente, potrà formarsi con quanto si è stabilito (499.500.503) la seguente più esatta

Tavola delle ragioni dei seni d' incidenza e di refrazione dei raggi rossi, medj e paonazzi.

		dall' *Aria* nel *Vetro*			
508	R	77 : 50	1, 54 : 1	1 : 0, 64935	
509	M *sen i : sen r* ::	77,5 : 50 ::	1, 55 : 1 ::	1 : 0, 64516	, inc : r :: 31 : 20
510	P	78 : 50	1, 56 : 1	1 : 0, 64103	
		dall' *Aria* nel *Flint*			
511	R	313 : 200	1, 565 : 1	1 : 0, 63898	
512	M *sen i : sen r* ::	316 : 200 ::	1, 580 : 1 ::	1 : 0, 63291	, inc :: 8 : 5
513	P	319 : 200	1, 595 : 1	1 : 0, 62696	
		dall' *Aria* nell' *Acqua*			
514	R	108 : 81	1, 33333 : 1	1 : 0, 75000	
515	M *sen i : sen r* ::	108,5 : 81 ::	1, 33951 : 1 ::	1 : 0, 74654	, inc :: 4 : 3
516	P	109 : 81	1, 34568 : 1	1 : 0, 74312	
		dal *Vetro* nel *Flint*			
517	R	313 : 308	1, 01623 : 1	1 : 0, 98403	
518	M *sen i : sen r* ::	316 : 310 ::	1, 01935 : 1 ::	1 : 0, 98101	, inc :: 32 : 31
519	P	319 : 312	1, 02244 : 1	1 : 0, 97806	
		dall' *Acqua* nel *Vetro*			
520	R	926 : 800	1, 1575 : 1	1 : 0, 86393	
521	M *sen i : sen r* ::	928 : 800 ::	1, 1600 : 1 ::	1 : 0, 86207	, inc :: 93 : 80
522	P	930 : 800	1, 1625 : 1	1 : 0, 86022	

523. 3°. Che fatta $n : 1$ la ragion dei seni d' incidenza e di refrazione per i raggi medj, sarà generalmente quella dei rossi $n - N : 1$ e quella dei paonazzi $n + N : 1$, ed N sarà la misura della *forza dispersiva* nel dato mezzo, il cui valore si avrà sostituendo ad n e ad $n - N$ ovvero ad $n + N$ i loro numeri corrispondenti: così nel passaggio dall' aria nel

vetro si ha $n - N = 1,54$ ed $n = 1,55$ onde $N = \frac{1}{100}$: dall' aria nel flint $N = \frac{3}{200}$: dall' aria nell' acqua $N = \frac{5}{809}$: dal vetro nel flint $N = \frac{2}{641}$ prossimamente ec.

524. 4°. Che supposta l' incidenza $i = 90°$ incirca e perciò *sen* $i = 1$, si avrà per gli angoli di refrazione

dall' *Aria* nel *Vetro*	R	0,64935 (508) = *sen* 40°, 29′, 33″
	M V*sen r* =	0,64519 (509) = *sen* 40, 10, 40
	P	0,64103 (510) = *sen* 39, 52, 6
dall' *Aria* nel *Flint*	R	0,63898 (511) = *sen* 39, 42, 57
	M F*sen r* =	0,63291 (512) = *sen* 39, 15, 55
	P	0,62696 (513) = *sen* 38, 49, 34
dall' *Aria* nell' *Acqua*	R	0,75000 (514) = *sen* 48, 35, 25
	M H*sen r* =	0,74654 (515) = *sen* 48, 17, 30
	P	0,74312 (516) = *sen* 47, 59, 52
dal *Vetro* nel *Flint*	R	0,98402 (517) = *sen* 79, 44, 36
	M F*sen r* =	0,98101 (518) = *sen* 78, 48, 58
	P	0,97806 (519) = *sen* 77, 58, 33
dall' *Acqua* nel *Vetro*	R	0,86374 (520) = *sen* 59, 45, 39
	M V*sen r* =	0,86185 (521) = *sen* 59, 32, 59
	P	0,85997 (522) = *sen* 59, 20, 29

525. 5°. Che all' incontro dunque non potrà mai un raggio rosso passar dal vetro comune nell' aria se sia $i > 40°, 29', 33''$, nè dal flint nell' aria se $i > 39°, 42', 57''$, nè dall' acqua nell' aria se $i > 48°, 35', 25''$, nè dal flint nel vetro se $i > 79°, 44', 36''$, nè dal vetro nell' acqua se $i >$

$59°, 44', 20''$, perchè crescendo la refrazione al crescer dell' incidenza (501), verrebbe *sen* $r >$ *sen* $90°$, cioè il seno di refrazione sarebbe maggior del raggio il che è assurdo (L. 692). Ora i raggi rossi sono i men rifrangibili (507); dunque se essi non passano, molto meno passeranno tutte l' altre specie di raggi: in questi casi pertanto il raggio sarà rispinto indietro e la refrazione si cangierà in riflessione, fenomeno maraviglioso che ha fatte immaginar sulla riflessione e refrazione delle ipotesi affatto singolari: noi non ci fermeremo a parlarne.

526. 6°. Che i raggi più rifrangibili sono anche i più riflessibili; poichè mentre i rossi non son riflettuti nel vetro se non sia $i > 40°, 29', 33''$ (524), i paonazzi più rifrangibili (507) si riflettono subito che $i > 39°, 52', 6''$; dicasi lo stesso del flint, dell' acqua ec.

527. Sottraendo ora le diverse refrazioni u dei raggi ultimi o paonazzi dalle refrazioni p dei primi o rossi, ovvero queste da quelle secondo la lor minore o maggior grandezza, si avrà l' angolo di *dispersione* o la dispersione d: così (524) $p - u = 40°, 29', 33'' - 39°, 52', 6'' = 0°, 37', 27'' = d$ è la massima dispersione dopo la refrazion dei raggi che passano dall' aria nel vetro: $p - u = 39°, 42', 57'' - 38°, 49', 34'' = 0°, 53', 23'' = d$ è la massima dispersione dopo la refrazion dei raggi che dall' aria passano nel flint ec. Dal che può dedursi che la differenza tra gli angoli p, u è piccolissima, ovvero che $p - u = d$ è ordinariamente un angolo minimo, giacchè nel passaggio dal vetro nel flint, ove accade una dispersione più grande che in ogni altro passaggio, si trova (524) $p - u = 79°, 44', 36'' - 77°, 58', 33'' = 1°, 46', 3'' = d$, cioè la massima dispersione non eguaglia due gradi.

528. Posto ciò potrà conoscersi la dispersione d dopo il passaggio dei raggi solari per una superficie IA, sol che sia 60.
data l' incidenza i dei raggi medj, la ragione $n:1$ dei seni d' incidenza e di refrazione, e la misura N della potenza dispersiva. Poichè avendosi M *sen* i : M *sen* $r :: n : 1$, sarà M *sen* r

$= \frac{M\,\text{sen}\,i}{n}$ ($=\text{sen}\,m$): avendosi inoltre (527) R $\text{sen}\,i$: R $\text{sen}\,r$ ($=\text{sen}\,p$) :: $n-$N : 1, e P $\text{sen}\,i$: P $\text{sen}\,r$ ($=\text{sen}\,u$) :: $n+$N : 1, e facendo tutti i raggi sulla superficie rifrangente un comune angolo d' incidenza (442), sarà R $\text{sen}\,i=$ P $\text{sen}\,i$ ed ($n+$N) $\text{sen}\,u=(n-$N$)\,\text{sen}\,p$; onde essendo $p-u$ un angolo piccolissimo (527) e $\text{sen}\,p+\text{sen}\,u=2\,\text{sen}\,m$ per la natura dei raggi medj (507), si avrà (L. 774) $p-u=\frac{2\text{N}\,\text{tang}\,m}{n}=d=\text{tang}\,d$ presso a poco. Così posto $i=23^\circ, 39', 5''$, $n=\frac{77,5}{50}=1,55$, N $=\frac{1}{100}$ (523), sarà M $\text{sen}\,r=\text{sen}\,m=\text{sen}\,15^\circ$, $\text{tang}\,d=\frac{2\,\text{tang}\,15^\circ}{100.1,55}=\text{tang}\,0^\circ, 11', 53''$ e perciò la cercata dispersione $d=11', 53''$.

60. e 61. 529. Che se da una superficie IA passino i raggi ad un' altra inclinata KA, come per i lati del prisma IAK il cui angolo rifrangente A $=a$ chiamate m, m' le refrazioni LDC, FCG dei raggi medj, $i'=$ VCD la loro incidenza in AK, p, p', u, u' le refrazioni dei raggi primi ed ultimi, e g, h le loro incidenze in AK, se si osservi che $p>u$ (507), onde $h>g$ ovvero $g>h$ (L. 661) ma sempre $u'>p'$ (507), avremo M $\text{sen}\,i'$: AM $\text{sen}\,r'$ :: 1 : n (499), ed AM $\text{sen}\,r'=n$M $\text{sen}\,i'=\text{sen}\,m'$; avremo inoltre $\text{sen}\,g:\text{sen}\,p'::1:n-$N, $\text{sen}\,h$: $\text{sen}\,u'$ :: 1 : $n+$N, ($n+$N) $\text{sen}\,h=\text{sen}\,u'$, ($n-$N) $\text{sen}\,g=\text{sen}\,p'$, e però essendo $p-u=\pm h\mp g$ (L. 661) e $p'-u'$ un angolo piccolissimo come sopra, si avrà (L. 775) $\frac{2\text{N}\,\text{sen}\,(i'\pm m)}{\cos m\,\cos m'}=u'-p'$ ovvero poichè $i'\pm m=a$ (L. 660) ed $u'-p'=d'$, sarà $\frac{2\text{N}\,\text{sen}\,a}{\cos m\,\cos m'}=d'=\text{tang}\,d'$ vicinissimamente. Così ritenuti i valori di sopra (528) e posto $a=30^\circ$, poichè $\text{sen}\,m=\text{sen}\,15^\circ$, sarà $i'=a-m=15^\circ$, $\text{sen}\,m'=n$M $\text{sen}\,i'=1,55.\text{sen}\,15^\circ=\text{sen}\,23^\circ, 39', 5''$, e $\text{tang}\,d'=$ .... $\frac{2\,\text{sen}\,30^\circ}{100\times\cos 15^\circ . \cos 23^\circ, 39', 5''}=\text{tang}\,0^\circ, 38', 52''$ e perciò l' angolo di dispersione $d'=38', 52''$.

530. Ma se all' incontro per mezzo degli angoli di refrazione e di dispersione voglia determinarsi la misura delle potenze refrattiva e dispersiva d' un prisma, ricevuto

normalmente sulla sua prima superficie un raggio solare, si misureranno con esattezza l' angolo di refrazione AMr' dei raggi medj alla seconda superficie, l' angolo di dispersione d e l' angolo rifrangente a, e avremo AM$i=0$, M$r=0$, M$i'=a$ (L. 658), AM$r'=m'$, e sarà nota la potenza refrattiva o la ragione tra M $\text{sen}\,i'$ ed AM $\text{sen}\,r'$. Sia dunque M $\text{sen}\,i'$: AM $\text{sen}\,r'$ :: 1 : n; dunque AM $\text{sen}\,i$: M $\text{sen}\,r$ :: n : 1 (499) ed M $\text{sen}\,r=\text{sen}\,m$ (528) : ma $\frac{2\text{N}\,\text{tang}\,m}{n}=d$ (528); dunque la misura della potenza dispersiva N $=\frac{dn}{2\,\text{tang}\,m}$.

E quì si noti che l' equazione ($n-$N) $\text{sen}\,p=(n+$N) $\text{sen}\,u$ (528) da cui nasce tutta la teorìa e delle potenze dispersive e degli angoli di dispersione, non si riduce alle forme che le abbiamo date (528, 529) se non nell' ipotesi di p prossimamente eguale ad u (527) o di $p \backsim u$ prossimamente eguale a zero; onde quando l' ipotesi non sussista, la teorìa non avrà luogo. E' però vero che se gli angoli d' incidenza e quindi (501) anche quelli di refrazione saranno assai piccoli, la pratica differirà dal rigor matematico di soli pochi secondi, il cui effetto non è sensibile all' occhio; e diciamo *all' occhio* perchè in somma tutte queste ricerche sulla dispersione dei raggi omogenei son dirette a perfezionar le macchine ottiche di cui tra poco ragioneremo.

531. I prismi guidano naturalmente alla considerazion delle *lenti* o di quei solidi diafani MCND di forma lenticolare, il cui asse PQ congiunge i centri P, Q dei due seg- 59.
menti sferici MCN, NDM che gli compongono. In fatti riguardando la lente come un poliedro d' infinite faccie e stendendo indefinitamente in due piani le due faccie per cui passa il raggio lucido DC, è chiaro che la refrazione si farà in uno stesso modo e nei piani e nella lente. Dovrà dunque intendersi delle lenti quanto si è detto finora dei piani paralleli e dei prismi, e perciò 1°. condotti due piani paralleli IA, KB tangenti alla lente in D, C, il raggio HD che cadendo in D si refrange in DC, emergerà per CG parallelo (503) e paralleli saranno ancora i semidiametri e nor-

FIG. 59 mali QD, PC dei segmenti; onde dai triangoli simili QOD, POC avendosi QO : OP :: QD : PC ed essendo invariabile la ragione dei raggi QD, PC e perciò anche quella di QO, OP, è forza che il raggio lucido DC situato tra due parallele qualunque IA, KB passi sempre per O; dunque ogni lente doppiamente convessa o concava ha un certo punto o *centro* O per cui se passi un raggio di luce comunque obliquo, son sempre paralleli i raggi incidente HD ed emergente CG: 2°. perciò tra i raggi che cadono paralleli sopra una lente qualunque NM ve ne sarà sempre uno che passando per il centro O emergerà parallelo; anzi supposta la lente molto sottile, il raggio continuerà sensibilmente per la medesi-
60 ma retta. 3°. i raggi HD, CG mediocremente obliqui con-
e vergono verso l'asse quando la lente è convessa e ne diver-
61 gono quando è concava appunto come nei prismi IAK: 4°. i raggi stessi HD quasi paralleli all'asse, fanno un angolo di deviazione proporzionale all'angolo rifrangente A (504), e poichè quest'angolo in una lente è formato dalle tangenti ad essa e perciò diviene tanto più grande quanto i punti D son più lontani dall'asse, crescerà la deviazione a misura che i punti D si avvicinano all'estremità della lente ec.

63 532. Data ora una lente AI ΓB *convesso-convessa*, la cui grossezza AB $= c$, i cui raggi BC $= a$, AK $= b$, e il cui asse Φf passa per l'oggetto lucido Φ, è facile di assegnare in Φf i punti o *fuochi* f, F ove la riunione dei raggi dopo una o due refrazioni produce l'immagine di Φ. Poichè preso un raggio incidente ΦIG vicinissimo a ΦA che piegandosi prima in I e poi in T, formi le prolungate fΓD, FTE, se dai centri C, K si conducano sopra ΦG, fD, FE i seni KG, KH della prima incidenza KIG e refrazione KIH, e i seni CD, CE della seconda incidenza CTD e refrazione CTE, gli angoli infinitesimi AΦI, TFB, TfB daranno ΦA $=$ ΦI $= y$, fB $= u = f$Γ, fK $= f$A $-$ AK $= u + c - b = f$H, fC $= u + a = f$D, FB $= x =$ FT, FC $= x + a =$ FE, e gli archi minimi AI, BT potranno riguardarsi come rette linee. Perciò

nee. Perciò chiamata $\frac{p}{q} = \frac{\text{KG}}{\text{KH}}$ la ragion dei seni d'inci- FIG. 63.
denza e di refrazione all'entrar nella lente, e $\frac{q}{p} = \frac{\text{CD}}{\text{CE}}$ la ragione stessa all'uscirne (499), dai triangoli rettangoli e simili ΦAI e ΦGK, fAI ed fHK avremo ΦK $(y + b)$: KG (p) :: ΦI (y) : IA $= \frac{py}{y+b}$, e parimente fA $(u + c)$: AI $\left(\frac{py}{y+b}\right)$ :: fH $(u + c - b)$: HK (q), onde $qu + cq = \frac{puy + pcy - bpy}{y + b}$, ovvero $f\text{B} = u = \frac{cqy + bcq + bpy - cpy}{py - qy - bq}$ e perciò fA $=$ $z = f\text{B} + c = \frac{bpy}{y(p-q) - bq}$, prima equazione che determina la lunghezza focale fA dopo una refrazione, e che si applica, fatto $b = \infty$ (476), alle superficie piane, e fatto b negativo, alle concave, e generalmente dà $z = \frac{\pm bpy}{y(p-q) \mp abq}$.

533. Di nuovo dai triangoli rettangoli e simili fDC ed fBT, FEC ed FBT avremo fC $(u + a)$: CD (q) :: fT (u) : TB $= \frac{qu}{u+a}$ e parimente FC $(x + a)$: CE (p) :: FT (x) : TB $\left(\frac{qu}{u+a}\right)$; onde $u = \frac{apx}{qx + aq - px} = (532) \ldots \frac{cqy + bcq + bpy - cpy}{py - qy - bq}$, ed FB $= x = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{acq^2y + abcq^2 + abpqy - acpqy}{ap^2y - apqy - abpq - cq^2y - bcq^2 - bpqy + 2cpqy + bcpq + bp^2y - cp^2y}$$

$$= \frac{abq(cq + py) - acqy(p - q)}{(apy + bpy + bcq)(p - q) - cy(p-q)^2 - abpq}$$ seconda equazione che determina la lunghezza focale FB dopo due refrazioni, e che si applica, fatta $a = \infty = b$, alla lente *piano-piana*; fatta $b = \infty$ alla *piano convessa*; fatta $b = \infty$ ed a negativa, alla *piano-concava*; fatta $a = \infty$, alla *convesso-piana*; fatta a negativa, alla *convesso concava* o *menisco*; fatta a negativa e $b = a + c$, alla *convesso-concavo-concentrica*; fatta b negativa ed $a = \infty$ alla *concavo-piana*; fatta b negativa, alla *concavo-convessa* o *menisco*; fatte a, b negative, alla *concavo-concava*; fatta b negativa ed $a = b + c$, alla *concavo-convesso-concentrica*; ed infine fatto $c = 2a$ e $b = a$, alla *sfera* del raggio a.

FIG. 534. Cominciamo dalla prima equazione $fA = z = \frac{\pm bpy}{y(p-q) \mp bq}$ e supponghiamo $b = \infty$ (532); dunque $z = \frac{-py}{q}$, cioè se la superficie rifrangente AI sia piana (quali
63. posson considerarsi certe porzioni d' acqua o d' aria, benchè matematicamente sferiche), il fuoco o immagine f, che nella costruzion della formula si prese di quà da AI oppostamente a Φ, sarà dalla parte medesima dell' oggetto Φ; e poichè l' equazione dà $\frac{py}{q} : y :: p : q$, oltre il sapersi d' altronde che l' oggetto F dee rialzarsi fino in N (447), si sa-
50. prà ancora la quantità del rialzamento, perchè *la distanza dell' immagine* N *dalla superficie* AB *starà sempre alla distanza dell' oggetto* F *dalla medesima superficie, come il seno d' incidenza al seno di refrazione*. Sicchè l' occhio H situato nell' aria vedrà un oggetto F nell' acqua più vicino per $\frac{1}{4}$ della sua profondità e più grande del vero: più vicino per $\frac{1}{4}$, perchè $\frac{3y}{4} : y :: 3 : 4 :: \frac{3}{4} : 1$ (515); più grande, perchè altrove dimostreremo esser questa una general proprietà dei mezzi più refringenti o più densi. Dopo ciò non dee far maraviglia se la parte d' un oggetto diritto immersa obliquamente nell' acqua comparisca incurvata e più grossa del rimanente, o se in un vaso ripieno d' acqua si renda visibile un oggetto a quella distanza da cui, vuotato il vaso, non si vedrebbe.

535. All' incontro dunque un occhio F nell' acqua vedrà più remoto dalla superficie e più piccolo del vero un oggetto H che sia nell' aria; l' effetto per altro è lo stesso riguardo al rialzamento, e da H salirà l' oggetto in M lungo il raggio refratto FD (447). Di quì l' alterazione di tutte l' osservazioni astronomiche (se non si facciano allo *zenit*) e la perpetua necessità di correggerle; poichè il raggio lucido
52. *Sp* che dal vuoto passa nell' atmosfera DO, si rifrange in p, in c, in b, in a ec. a misura degli strati sempre più densi che incontra, e per una curva $pcba$ O assolutamente indefinibile entra nell' occhio O che giudica l' astro S nella direzio-

 FIG.

ne di OS' tangente in O (447). Dal che segue 1°. che *la refrazione fa comparire gli astri più del vero elevati nel circolo verticale* sopra cui si misura la refrazione: 2°. che gli 52.
astri son realmente sotto l' orizzonte allorchè sembrano arrivarvi: 3°. che *la refrazione scema continuamente dall' orizzonte*, ove atteso il massimo angolo d' incidenza è massima (501), *fino allo zenit*, ove annullandosi quell' angolo, diventa nulla: 4°. che dipendendo la refrazione non dalla distanza dell' astro ma dalla quantità d' atmosfera che il suo raggio attraversa, *tutti gli astri a una stessa altezza soffrono una medesima refrazione*: 5°. che *la refrazione avvicina sempre tra loro due astri*, per la ragione medesima per cui gli allontana la parallasse (455. 8°.) cioè per la convergenza dei verticali dall' orizzonte allo zenit ove si riuniscono; onde se a' sia l' altezza apparente di un astro, e se ne conoscano la parallasse p e la refrazione r, sarà l' altezza vera $a = a' + p - r$: 6°. che essendo varia ne' varj climi e nelle varie stagioni la densità dell' atmosfera, la quale varia anche irregolarmente in vicinanza della terra, le osservazioni presso l' orizzonte son poco esatte, e inoltre è assai difficile avere una Tavola universale delle refrazioni. Gli Astronomi per altro costretti a farne uso perpetuamente, hanno vinta in gran parte colla moltitudine delle osservazioni la difficoltà; ed oltre le Tavole *locali* (di cui parleremo altrove accennando il modo di costruirle) hanno formata una *Tavola delle refrazioni medie* per le zone temperate, unendovi quelle correzioni che esige l' attual densità dell' aria indicata dal barometro (337) ed il grado del calore attuale preso dal termometro Reaumuriano in cui il 0° esprime lo stato dell' aria nella congelazione dell' acqua, 10° il temperato, e 80° il calor dell' acqua bollente. Poichè sapendosi per esperienza che i volumi v dell' aria a 0° e a 80° son tra loro :: 173 : 253 :: 173 : 173 + 80, cioè aumentano come i gradi, e preso per unità di temperatura atmosferica T quella in cui il barometro è a 28 *pollici* (= 336 *lin.*) ed il termometro è a 10° (cioè $v = 173 + 10 = 183$); se sian calcolate

su questi dati le refrazioni medie r, e suppongasi che esse crescano in ragion diretta dell' aumento di altezza barometrica b $\left(\text{cioè di } \frac{b}{336}\right)$ e in ragione inversa dell' aumento t dei gradi di calore $\left(\text{cioè di } \frac{10}{10+t} \text{ ovvero } \frac{183}{183+t}\right)$, facendosi finalmente $\frac{183}{183+t} \times \frac{b}{336} = \mathrm{X}$, si avrà T $(=1)$: $r :: \mathrm{X} : r\mathrm{X} = r'$ *refrazione vera cercata*.

Tanto la *Tavola delle refrazioni medie*, quanto quella *delle densità atmosferiche per la lor correzione*, cioè delle quantità X, si troveranno al fine di questo Libro. Così se vogliasi la vera refrazione r' per l'altezza di $26° \; 30'$ quando il barometro è a $27^p \; 4^l \; (= 328^l)$ e il termometro a $19°$, si troverà nella prima Tavola $r = 1' \; 53'', 6$ e nella seconda sotto $27^p \; 4^l$ e di fianco a $19°$ si avrà $\mathrm{X} = 0,930 \left(= \frac{328}{336} \times \frac{183}{192}\right)$, ed $r' = 0,930 \, r = 1' \; 45'',6$.

536. Se nell' equazione $z = \frac{\pm bpy}{y(p-q) \mp bq}$ per le superficie convesse e concave (532) si faccia $y = \infty$, verrà $z = \frac{\pm bp}{p-q}$, cioè *posto l' oggetto ad infinita distanza, la principal lunghezza focale sarà quarta proporzionale dopo la differenza dei seni, il seno d' incidenza e il raggio della superficie rifrangente*. Preso $p > q$, se la superficie è convessa, $\frac{bp}{p-q}$ è positivo; se è concava si ha $\frac{-bp}{p-q}$ negativo; cioè l' immagine portata dai raggi paralleli è dentro il mezzo rifrangente nel primo caso, e ne esce fuori nel secondo.

Molte altre riflessioni sul moto e positura dell' immagine potranno farsi, se piaccia, per mezzo di questa equazione: ma dopo averne dato distesamente il metodo nella teorìa degli specchi sferici, è inutile per noi di trattenervisi; lo stesso motivo ci dispensa dal fermarci molto sulla seconda equazione, a cui però torneremo trattando delle macchine ottiche.

537. Supponghiamo in primo luogo che la lente divenga una sfera: fatto $b = a$, e $c = 2a$ (533), la seconda equazione sarà $\mathrm{FB} = x = \frac{ay(2q-p)+2a^2q}{2y(p-q)-a(2q-p)}$, e se i raggi sie- 63.
no paralleli, cioè se $y = \infty$, avremo $x = \frac{a(2q-p)}{2(p-q)}$; onde dal fuoco principale F al centro O vi sarà la distanza $\mathrm{FO} = \mathrm{FB} + \mathrm{BO} = x + \frac{c}{2} = x + a = \frac{ap}{2(p-q)}$, che nel vetro, ove $p = 3$, $q = 2$ incirca (509), si riduce ad $\mathrm{FO} = \frac{3a}{2}$; nel flint, ove $p = 8$, $q = 5$ incirca (512), ad $\mathrm{FO} = \frac{4a}{3}$; e nell' acqua, ove $p = 4$, $q = 3$ incirca (515), ad $\mathrm{FO} = 2a$.

538. Ma nelle lenti è per lo più sì piccola la grossezza $\mathrm{AB} = c$ in paragone dei raggi a, b, che comunemente si neglige: allora la lunghezza focale nelle lenti convesso-convesse e concavo-concave diviene $\mathrm{FB} = \frac{abqy}{(a+b)(p-q)y-abq}$ (533) ove fatto $y = \infty$ e chiamando f la principal lunghezza focale si ha $f = \frac{abq}{(a+b)(p-q)}$: quindi dividendo $\frac{abqy}{(a+b)(p-q)y-abq}$ sopra e sotto per $(a+b)(p-q)$ e sostituendo f in luogo del suo valore trovato ora, si avrà l' espressione semplicissima $x = \frac{fy}{y-f}$ per le lenti convesso-convesse, e per le concavo-concave ove f è negativo, $x = \frac{-fy}{y+f}$. Dunque 1°. fatto nella prima $y = f$, sarà $x = \frac{f^2}{0} = \infty$, cioè *se l' oggetto sia nel fuoco principale, l' immagine sarà ad infinita distanza*, e i raggi usciranno dalla lente paralleli; perciò se l' oggetto abbia più punti lucidi, i coni venuti da ciascun punto si cangieranno all' uscir della lente in cilindri, che attesa l' obliquità dell' incidenza, convergeranno nelle lenti convesse, ma nelle concave divergeranno (531): 2°. essendo nelle lenti convesse $y < f$, e nelle concave y o positivo, o se negativo maggiore di f, si avrà $x = \frac{\pm fy}{y \mp f}$ quantità negativa, cioè il fuoco sarà immaginario e i raggi divergenti (486) usciranno perciò non più in

cilindri ma in lunghi coni lucidi che convergeranno al solito nelle convesse e divergeranno nelle concave (531): 3°. se nelle lenti convesse sia $y > f$, si avrà $x = \frac{fy}{y-f}$ quantità positiva, cioè il fuoco sarà reale e i raggi divergenti (486) usciranno perciò in coni molto più serrati e più corti dei precedenti ec. 4°. poichè dall' espression generale di x si ricava $x : f :: y : y-f$ ed $x : y :: f : y-f$; d' onde viene $x - f : x :: f : y$ ed $x : x+y :: f : y$ e quindi $x - f : x :: x : x+y$, suppo-
63. sto F il fuoco principale, ed f quello d' un oggetto vicino Φ, sarà $fO : f\Phi :: FO : O\Phi$, ed $fF : fO :: fO : f\Phi$: 5°. infine facendo y negativa, si avrà il *fuoco dei raggi convergenti*, che per le lenti convesse sarà $x = \frac{fy}{y+f}$, e per le concave $x = \frac{fy}{f-y}$, ove se $y = f$ si avrà nelle prime $x = \frac{f}{2}$ e nelle seconde $x = \infty$ cioè in queste i raggi convergenti diventeran paralleli.

539. E' certo che l' equazione $x = \frac{abqy}{(a+b)(p-q)y - abq}$ si avvera egualmente e quando l' oggetto è nell' asse Φf, come Φ, e quando è fuori dell' asse, come μ, purchè μ, Φ sieno egualmente distanti dalla lente. Infatti condotto per μ l' asse μKm della superficie sferica AI e posto $\mu a = \Phi A = y$, si troverà dopo la prima refrazione, $ma = z' = \frac{bpy}{y(p-q) - bq} = z = fA$ (532): di nuovo se da m si conduca l' asse mtC della superficie BT, e si consideri l' immagine m come un secondo oggetto situato contrariamente al primo μ e si ponga perciò la distanza $y = -y' = mt$ e il raggio $b = -a = BC$ cangiando anche p in q e q in p atteso il cangiamento dei mezzi, si avrà una nuova lunghezza focale $x' = \frac{aqy'}{-y'(q-p)+ap}$ (532) $= \frac{aqy'}{y'(p-q)+ap}$: ma $y' = ma = z'$ perchè per ipotesi $c = 0$; dunque sostituito in luogo di y' il valor di z' verrà $x' = \frac{abqy}{(a+b)(p-q)y - abq} = x = FB = Mb$, cioè i fuochi f, m dopo la prima refrazione e i fuochi F, M dopo la seconda, saranno egualmente distanti dalla lente, e l' immagine FM sarà presso a poco simile all'

oggetto Φμ, intendendo quì ripetuto sulla rigorosa figura delle immagini e sulla loro situazione quanto dicemmo altrove (492).

540. Sieno intanto μa, $\mu' a'$ due raggi che partendo dallo stesso punto lontanissimo Φ' posson prendersi per paralleli (442), e sia $\mu' a'$ quello che passa per O ed emerge per
b formando sensibilmente una linea retta $\mu' b$ (531. 2°.). E' 63.
certo che il fuoco di questi raggi si troverà nel prolungamento di $\mu' b$, poichè il raggio $\mu' b$ non si piega e deve non pertanto unirsi con gli altri; dunque la retta passerà per il fuoco M; e quindi si formeranno i due triangoli simili $\Phi\mu' O$ o sia $\Phi\Phi' O$, FOM, onde $\Phi\mu' (= \Phi\mu = \Phi\Phi') : FM :: \Phi O (y + AO) : OF (x + BO)$, ovvero (per esser $c = 0$ e perciò $AO = OB = 0$) $:: y : x :: y : \frac{fy}{y \mp f}$ (538) $:: 1 : \frac{f}{y \mp f}$ non attendendosi al segno del numeratore che è relativo non alla quantità ma alla situazione: e quindi le grandezze lineari ΦΦ', MF dell' oggetto e dell' immagine saranno tra loro come la distanza ΦA alla lunghezza focale FB.

541. Ora se nell' equazione $x = \frac{abqy}{(a+b)(p-q)y - abq}$ si faccia $a = b = \infty$ sarà $= \frac{\infty^2 qy}{2\infty(p-q)y - \infty^2 q} = -y$ (L. 272), cioè nelle *lenti piano-piane* (533) *l' immagine si trova dalla parte stessa e nella stessa distanza dall' oggetto*, di cui perciò non si cangia nè la positura nè la grandezza. Che se inoltre sia $y = \infty$, verrà $x = -\infty$, cioè la lente piano-piana conserva ai raggi il loro parallelismo. E tutto ciò se $c = 0$: ma se la grossezza delle lenti sia qualche poco considerabile, fatto le sostituzioni nella formula generale (533), si troverà $x = \frac{cq + py}{-p}$, cioè l' immagine (non attendendo al segno −) sarà distante dalla superficie più vicina all' occhio di $\frac{cq + py}{p}$.

542. Poichè la principal lunghezza focale è $f = \frac{abq}{(a+b)(p-q)}$ (538), nel vetro, posto $p = 31$, $q = 20$, ovvero $p = 3$, $q = 2$ (509), sarà $f = \frac{20ab}{\pm 11(a+b)}$ ovvero

FIG.

$f = \frac{2ab}{\pm(a+b)}$; e quindi se $b = a$, viene $f = \pm a$, cioè nella lente di vetro convesso-convessa o concavo-concava di raggi eguali, la lunghezza focale principale eguaglia il raggio. Se inoltre si faccia $a = \infty$, oppure $b = \infty$, si trova $f = \pm 2b$ o $f = \pm 2a$, cioè *nella lente di vetro piano-convessa o piano-concava, la principal lunghezza focale eguaglia il diametro e resta sempre la stessa o si presenti all' oggetto la superficie piana della lente o la curva*. E di quì
63. per le lenti piano-convesse si deduce $f + CB = CF = 3a$, e $CF : FB :: 3 : 2 :: p : q$.

In pratica i raggi lucidi posson supporsi paralleli e perciò $y = \infty$ quando $y = 1000a$; poichè fatto $y = \infty$ e $b = a$ $= 10$ per esempio, avremo $x = \frac{20 . 10^2}{11 . 20} = 9{,}0909$, e fatto $y = 1000a = 100^2$, avremo $x = \frac{abqy}{y(a+b)(p-q) - abq} = \frac{10^2 . 20 . 100^2}{100^2 . 20 . 11 - 20 . 10^2} = 9{,}0992$; di modo che tra il fuoco dei raggi paralleli e il fuoco dei raggi che vengono da una distanza 1000 volte più grande del raggio a, non vi è la differenza di $\frac{1}{100}$, il che in pratica non è valutabile.

543. Infine essendosi trovata la lunghezza focale per le lenti concavo-concave $x = \frac{-fy}{y+f}$ (538), l'immagine a motivo del segno — sarà situata sempre di là dalla lente (485), e sarà distante da questa di $\frac{fy}{y+f}$. Per le lenti convesso-convesse si avrà $x = \frac{fy}{y-f}$ se sia $y > f$; ma se $f > y$, sarà $y - f$ quantità negativa ed $x = \frac{-fy}{f-y}$ dimostrerà che di là dalla lente è situata anche in questo caso l' immagine, ond' ella ne sarà distante di $\frac{fy}{f-y}$. E se si faccia $y = mf$, si avrà $x = \frac{\pm mf}{m \mp 1}$, valore che darà esattamente la situazione e la distanza dell' immagine dalle lenti.

544. Quanto alle *lenti ustorie* che sono evidentemente quelle sole il cui fuoco F è reale (485), sia $QO = a$ un piccolo

colo

colo semiarco della lente piano-convessa QOI col raggio PQ FIG. 64.
parallelo all' asse ed ultimo di quanti ella ne può ricevere, e sia f il punto diverso da F ove questo raggio sega l' asse ΦF (531). Descritto col raggio fQ il piccolo arco QD e condotti dal centro C il semidiametro $CQ = CO = 1$ e i seni CP, CM della seconda incidenza e refrazione, onde $\frac{CP}{CM} = \frac{q}{p}$ (532), dai triangoli simili CfM, NfQ si avrà $Cf : fQ\ (= fD) :: CM : NQ\ (= CP) :: p : q :: CF : FO$ (542); onde (L. 258) $CF - Cf\ (= Ff) : FO - fD\ (= Ff - OD) :: CF : FO$, cioè $Ff : OD :: CF : CF - FO\ (= CO) :: p : p - q$, ed $Ff = \frac{p.OD}{p-q}$. Ora poichè i coseni CN, fN attesa la piccolezza degli archi QO, QD, non differiscono sensibilmente dai raggi CO, fD, e perciò (L 563) $ND : NO :: CO : fD = FO$ presso a poco (538), onde $OD : NO :: CF : FO :: p : q$, avremo $OD = \frac{p.NO}{q}$, e quindi (giacchè $NO = 1 - \cos a$) $Ff = \frac{p^2(1-\cos a)}{q(p-q)}$, spazio occupato da tutti i raggi refratti dalla lente QOI. E se si osservi che essendo ON assai piccola, si ha presso a poco $ON = \frac{QN^2}{2CO}$ (L. 564) $= \frac{\mathrm{sen}^2 a}{2CO}$; troveremo anche $Ff = \frac{p^2\,\mathrm{sen}^2 a}{2q(p-q)CO}$: ma $CO : CF :: p - q : p$, e $CF - CO\ (= FO) : CO :: q : p - q$; dunque $Ff = \frac{p^2\,\mathrm{sen}^2 a}{2(p-q)^2 FO}$ perciò $AE = \frac{QN \times fF}{Nf} = \frac{QN \times fF}{OF} = \frac{p^2\,\mathrm{sen}^3 a}{2q^2 CO^2} = \frac{p^2\,\mathrm{sen}^3 a}{2(p-q)^2 OF^2}$. Nel resto si potrà procedere come sopra (496, 497).

545. Fin quì abbiamo considerati i soli raggi di media rifrangibilità per cui $p = 31$, $q = 20$: ma se si voglia aver riguardo ai raggi paonazzi Qf per cui $p = 78$, $q = 50$ (510), e ai rossi QE per cui $p = 77$; $q = 50$ (508), si troverà che la principal lunghezza focale di quelli è $Of = f' = \frac{50\,ab}{28(a+b)}$ (542), di questi $OE = f'' = \frac{50\,ab}{27(a+b)}$; onde $f' : f'' :: 27 : 28$, $f' = \frac{27 f''}{28}$, $f'' = \frac{28 f'}{27}$ ed $fE = f'' - f' = \frac{f'}{27} = \frac{f''}{28}$ cioè *se i raggi cadano paralleli sopra una lente convesso-convessa o piano-convessa, i lor fuochi ovvero le immagini*

FIG. formate dalle sette specie di raggi, occupano $\frac{1}{27}$ o $\frac{1}{28}$ della principal lunghezza focale: onde in una lente che abbia questa lunghezza di 27 piedi o di 28, l'immagini occupano lo spazio d'un intero piede. Pertanto essendo la luce molto densa e pochissimo separata verso il mezzo F dello spettro, ove perciò si trova il fuoco o immagine degli oggetti bianchi, è manifesto 1°. che sarà fF o $\frac{1}{54}$ o $\frac{1}{56}$, o prendendo
64. un mezzo tra due, $\frac{1}{55}$ in circa della principal lunghezza focale: 2°. che essendo simili i triangoli fAF, fQN, si ha $AF : Ff :: QN : Nf = OF$; onde come $fF = \frac{OF}{55}$, così $AF = \frac{QN}{55}$.

Non ci fermeremo sulle proprietà del menisco, poichè non se ne fa comunemente alcun uso, ed è poi facile di averne e di esaminarne la lunghezza focale $x = \frac{-2aby}{\pm(a-b)y+2ab}$ fatto $p=3$, $q=2$ o b ovvero a negative (533, 538): così si troverà che il menisco concavo-convesso-concentrico equivale alla lente piano-piana, il concavo-convesso alla piano-convessa o alla convesso-convessa ec.

546. Terminiamo colla spiegazione dell' *Iride*, cioè di
64. quell' arco mirabile AEB che con tutta la pompa dei colori prismatici comparisce sì spesso nell' atmosfera allorchè voltate le spalle al Sole ben chiaro, si osserva una nuvola che investita dai raggi di lui si scioglie in pioggia. Non è raro di vedere a un tempo stesso due iridi AEB, CGD, l' una concentrica all' altra: in tal caso i colori dell' interiore o *primaria* AEB son vivi e brillanti; il rosso ne occupa la parte più alta, l' infimo è il paonazzo, e tra questi son situati in fasce concentriche gli altri cinque intermedj nel loro ordine consueto; all' incontro i colori dell' esteriore o *secondaria* CGD son languidi e smorti, il rosso è al disotto, il paonazzo al di sopra, e anche l' ordine degli intermedj è rovesciato. Se dal punto P ove suppongo l' Osservatore, si conduca l' indefinita PO parallela ai raggi solari SE, SF, SG,

SH che tutti son paralleli fra loro (442), gli angoli EPO, FPO, GPO, HPO determineranno il *semidiametro apparente* dei diversi archi dell' iridi, il quale eguaglia sempre l' altezza apparente EPI, FPI, GPI, HPI del punto E, F, G, H il più elevato dei varj archi, e l' apparente altezza OPI = LPK del centro del Sole sull' orizzonte. I principali fenomeni dell' iride dipendono dalla determinazione di questo semidiametro. FIG. 65.

547. Sia dunque la sfera o gocciola d' acqua MRNVM illuminata dai raggi paralleli del Sole BM, bm, $\beta\mu$: è chiaro che $\beta\mu$ passando per il centro C non soffre refrazione (439) e che tutti gli altri raggi, come BM, si rifrangono verso la normale MC (439) e vanno in qualche punto R, donde in parte escono dalla gocciola e in parte si riflettono (473) facendo l' angolo MRC = CRV (440) e tagliando perciò l' arco MSR = RNV (L. 504, 482), onde si ha l' angolo MRV = 2MRC = 2CMR. In V avviene del pari una nuova refrazione e una nuova riflessione, e l' une e l' altre posson moltiplicarsi all' infinito, ma sempre con discapito del raggio primitivo BM che in ciascuna riflessione trasmette nell' aria una porzion di se stesso, e perciò continuamente si indebolisce. Ora ogni raggio è variamente rifrangibile (507) e nel rifrangersi sviluppa i sette colori prismatici (505); dunque se l' occhio possa ricevere il raggio rifratto, dovrà necessariamente riceverlo colorato, e nella prima uscita in R lo vedrebbe più vivo che nella seconda in T, e in questa più che nella terza in V ec.. 66. 67.

548. Ma l' occhio in tanta distanza dalla nuvola piovosa e in tanta piccolezza delle gocciole rifrangenti non riceve *efficacemente* una specie qualunque di raggi se non sieno paralleli; poichè la densità della luce divergente decrescendo almeno in ragione inversa dei quadrati delle distanze (444), i tenuissimi raggi trasmessi all' occhio non saranno *efficaci* se non vi giungano con la loro densità primitiva, cioè se non conservino il loro parallelismo (443). Ora 1°. I raggi paralleli BM, bm non possono mai uscir paralleli in 66.

FIG.
66. R dopo due refrazioni senza alcuna riflessione; perchè
questa è una proprietà delle lenti piano-piane (541) che
non conviene alla sfera: 2°. usciranno bensì paralleli in
V, v, dopo una riflessione e due refrazioni se si riflettano
67. da uno stesso punto R; perchè allora si avrà MSR $=$ RNV
ed mSR $=$ RNv (547) e perciò Vv $=$ Mm, onde come entrarono paralleli in M, m, così ne usciranno per V, v: 3°.
usciranno anche paralleli per V, v dopo due riflessioni e due
refrazioni se fatta la prima riflessione in R, r camminino paralleli per RT, rt; perchè allora essendo Rr $=$ Tt (L. 502),
sarà anche Vv $=$ Mm (L. 482). Poichè dunque i raggi colorati non sono efficaci se non escano paralleli, e possono
uscir paralleli o dopo una riflessione allorchè son più forti,
o dopo due quando son più deboli, è manifesto che l'iride
primaria si mostra nell'uno e la secondaria nell'altro caso; nel caso di tre riflessioni, di quattro, di cinque ec., si
avrebbe la terza iride, la quarta, la quinta ec.: ma non occorre parlar di queste che non son mai sensibili all'occhio
umano.

66. 549. Prolungati pertanto fino al concorso in X se occorra, i raggi incidenti ed emergenti BM, PV e posto l'ango-
e lo d'incidenza CMS $= i$, l'angolo di refrazione CMR $= r$, l'
67. angolo o semidiametro cercato XPO $=$ PXM $= x$, avremo nel
poligono quadrilatero MXVRM l'angolo RMS $=$ RVX $= i$
66. $- r$, e l'angolo rientrante MRV $= 360° -$ MRV (L. 532)
$= 360° - 2r$ (547): ma gli angoli del poligono sono $180° \times 2 = 360°$ (L. 533); dunque $360° = 2i - 2r + 360° - 2r + x$,
e quindi $x = 4r - 2i$, cioè *il cercato semidiametro apparente XPO nel caso di una riflessione e due refrazioni eguaglia la differenza tra il quadruplo della refrazione e il
doppio dell'incidenza*. Similmente nel poligono pentagono
67. XVTRMX i cui angoli sono $180° \times 3 = 540°$ (L. 533), se si
osservi che l'angolo RMX $=$ TVX $= 180° -$ RMS (L. 487)
$= 180° - i' + r'$, l'angolo MRT $=$ RTV $= 2r'$, e l'angolo
cercato XPO $=$ VXM $= x$, si avrà $540° = 360° - 2i' + 2r' + 4r' + x$ e quindi $x = 2\,(90° + i' - 3r')$ cioè *il cercato se-*

midiametro apparente nel caso di due riflessioni e due refrazioni eguaglia la doppia differenza tra la somma degli angoli d'incidenza e retto, e il triplo dell'angolo di refrazione. Determinate dunque l'incidenza e la refrazione, sarà interamente noto il semidiametro VPO FIG. 67.

550. Sieno BM, bm due raggi vicinissimi prolungati in
S, s, e si conducano i diametri MN, mn: chiamate i ed i 66.
$+ di$ le loro incidenze, r ed $r + dr$ le corrispondenri refrazioni (501), si avrà $i =$ CMS $=$ MCμ (L. 500) $= \mu$M (L. 483), ed $i + di =$ Cms $= m$C$\mu = \mu$M $+$ Mm, onde $di =$ Mm; similmente $r =$ NMR $= \frac{1}{2}$ NR, ed $r + dr = nm$R $= \frac{1}{2}\,n$R $= \frac{1}{2}\,(n$N $+$ NR$)$, onde $dr = \frac{1}{2}\,n$N $= \frac{1}{2}$ Mm; dunque $di : dr ::$ Mm $: \frac{1}{2}$ Mm $:: 2:1 ::$ *tang* i : *tang* r (502), cioè *nel caso d'una riflessione e due refrazioni, le tangenti d'incidenza e di refrazione son tra loro in ragion dupla*.

Di nuovo $i' = \mu$M, $di' =$ Mm, $r' = \frac{1}{2}$ NR come so- 67.
pra, $r' + dr' = \frac{1}{2}\,nr = \frac{1}{2}\,(n$N $+$ NR $-$ R$r)$, onde $dr' = \frac{1}{2}\,($M$m -$ R$r)$; e poichè Rr $=$ RT $-$ Tt $- tr$ ed RT $=$ RM $=$ Rm $+ m$M, Tt $=$ Rr (L. 502), $tr = rm$ (547) $=$ Rr $+$ Rm, si ha Rr $=$ Rm $+ m$M $-$ Rr $-$ Rr $-$ Rm $= m$M $- 2$Rr cioè Rr $= \frac{1}{3}\,m$M avremo infine $dr' = \frac{1}{3}$ Mm dunque $di' : dr' ::$ Mm $: \frac{1}{3}$ Mm $:: 3:1 ::$ *tang* i' : *tang* r', cioè *nel caso di due riflessioni e due refrazioni, le tangenti d'incidenza e di refrazione sono in ragion tripla*.

551. Ora per i raggi rossi nel primo caso si ha *sen* i : *sen* $r :: n\,(= 1{,}33333) : 1$ (514); *tang* i : *tang* $r :: m\,(= 2) : 1$ (550); dunque (L. 772) *tang* $i = \sqrt{\left(\frac{m^2 - n^2}{n^2 - 1}\right)} = \ldots$

$$\sqrt{\left(\frac{(m+n)(m-n)}{(n+1)(n-1)}\right)} = \sqrt{\frac{3{,}33333 \times 0{,}66667}{2{,}33333 \times 0{,}33333}} = tang\ 59°.$$

$23'.\ 28''$, e *tang* $r = \frac{1}{2}$ *tang* $i =$ *tang* $40°.\ 12', 11''$; quindi $x =$ FPO $(= 4r - 2i\ (549)) = 42°.\ 2'$ in circa. Per i raggi paonazzi si ha $n = 1{,}34568$ (516), $m = 2$ come prima, e quindi $i = 58°.\ 40'.\ 31''$, $r = 39°.\ 24'\ 18''$, ed $x' =$ EPO $=$

FIG. 65. $40^\circ, 16'$ in circa; dunque *nell' iride primaria* AEB, ove il semidiametro dei raggi rossi FPO supera quello dei paonazzi EPO, *il rosso dee vedersi al di sopra e il paonazzo al di sotto*, come si trova in effetto (546).

Nel secondo caso per i raggi rossi si ha $sen\ i : sen\ r :: 1,33333 : 1$; $tang\ i : tang\ r :: 3 : 1$ (550); dunque $tang\ i = \ldots\ldots \sqrt{\frac{4,33333 \times 1,66667}{2,33333 \times 0,33333}} = tang\ 71^\circ, 49', 55''$, e $tang\ r = \frac{1}{3}\ tang\ i = tang\ 45^\circ, 26', 52''$.; dunque $x = GPO\ (= 180^\circ + 2i - 6r\ (549)) = 50^\circ, 59'$ in circa. Per i raggi paonazzi $sen\ i : sen\ r :: 1,34568 : 1$; $tang\ i : tang\ r :: 3 : 1$; $i = 71^\circ, 26', 9''$; $r = 44^\circ, 47', 7''$, ed $x' = HPO = 54^\circ, 10'$ in circa; dunque *nell' iride secondaria* CGD, ove il semidiametro dei raggi rossi GPO è minor di quello dei paonazzi HPO, *il rosso dee vedersi al di sotto e il paonazzo al di sopra*, come in effetto succede (546). Dati i seni d'incidenza e di refrazione dei raggi dell' altre specie, si otterrebbe col metodo stesso il semidiametro apparente dei loro archi, e si troverebbe che nell' iride primaria il turchino è immediatamente sopra di E, quindi il celeste ec., come nella secondaria che l' aranciato è contiguo a G, il giallo all' aranciato ec., tutto coerentemente all' osservazione (546). Se non si distinguon talvolta alcuni dei colori prismatici, bisogna incolparne e la figura imperfettamente sferica delle gocciole, il che turba l' ordinata refrazione e riflessione dei raggi, e il fondo poco oscuro della nuvola piovosa, il che confonde i colori più omologhi come l' aranciato e il giallo, il turchino e il paonazzo ec. Quest' ultima è la ragione per cui non è possibile di veder l' iride in faccia al Sole; quando pur le condizioni tutte della primaria potessero combinarsi in questa situazione, l' occhio colpito dall' estrema vivacità dei raggi solari, non ne avrebbe il minimo sentimento.

552. La larghezza apparente FPE dell' iride primaria sarebbe dunque $FPO - EPO = 42^\circ, 2' - 40^\circ, 16' = 1^\circ, 46'$, della secondaria, $HPG = HPO - GPO = 54^\circ, 10' - 50^\circ, 59' = 3^\circ, 11'$, e per la distanza apparente dell' una dall' altra si avrebbe

$GPF = GPO - FPO = 50^\circ, 59' - 42^\circ, 2' = 8^\circ, 57'$: ma poichè il Sole riguardato finora come un punto lucido, ha realmente un apparente diametro di $32'$, è chiaro che le larghezze dateci da questo punto si estendono di $16'$ al di quà e di $16'$ al di là di esso, onde la larghezza $FPE = 2^\circ, 18'$, la larghezza $HPG = 3^\circ, 43'$, la distanza $GPF = 8^\circ, 25'$, e i semidiametri $EPO = 40^\circ$, $FPO = 42^\circ, 18'$, $GPO = 50^\circ, 43'$, $HPO = 54^\circ, 26'$: e tali son le misure che presso a poco si trovano anche col quadrante ordinario allorchè l' iridi son perfette. FIG. 65.

553. Supponghiamo ora che gli angoli $EPO = 40^\circ$, $FPO = 42^\circ, 18'$, $GPO = 50^\circ, 43'$, $HPO = 54^\circ, 26'$ si rivolgano intorno all' asse comune PO; l' estremità E, F, G, H delle rette EP, FP, GP, HP descriveranno dunque sulla nuvola piovosa gli archi circolari AFEB, CHGD il cui centro sarà in O, e tutti i cui punti formeranno nell' occhio P uno stesso angolo respettivo e gli trasmetteranno perciò lo stesso respettivo colore. Ed ecco perchè i colori prismatici veggonsi continuati in archi concentrici, e perchè due Osservatori non veggono mai la stessa iride, giacchè uno stesso circolo non può aver due centri o due assi diversi. S' intende ancora che i colori essendo visibili sotto il solo angolo determinato EPO, FPO ec., il quale si altera subito che l' Osservatore si muove, l' iride veduta in movimento sarà sempre nuova, e fuggirà chi la segue e seguirà chi la fugge.

554. Infine sia un semidiametro qualunque $EPO = s$ e l' altezza del centro del Sole $IPO = x$; sarà $EPI = s - x$ l' altezza dell' iride, e poichè è retto l' angolo POE fatto dall' asse PO e dal semidiametro OE, avremo $PIO = 90^\circ - x$ e l' iride farà con l' orizzonte PI un angolo $EIP = 90^\circ + x$ (L. 511). Dunque 1°. se il Sole spunti dall' orizzonte, sarà $x = 0$, onde $EPI = s$ ed $EIP = 90^\circ$, cioè l' altezza dell' iride eguagliando il semidiametro, e facendo EI con l' orizzontale PI un angolo retto, l' arco colorato sarà un intero semicircolo normalmente appoggiato sull' orizzonte: 2°. se il Sole sia alto, per esempio, di 20°, si avrà $x = 20^\circ$, onde EPI

65. $= s - 20^{\circ}$ ed $EIP = 110^{\circ}$, cioè l'altezza dell'iride essendo minore del semidiametro, e facendo EI con l'orizzontale PI un angolo ottuso, l'arco colorato sarà più piccolo del semicircolo, e comparirà inclinato all'orizzonte oppostamente allo spettatore: 3°. se sia successivamente $x = 42^{\circ}, 18'$, $x = 54^{\circ}, 26'$, sarà pur successivamente $FPI = 0$ $HPI = 0$ (552), cioè i corrispondenti archi dell'iride non avranno altezza alcuna sull'orizzonte, e quindi per tutto il tempo impiegato dal Sole a salire da questi punti allo zenit e a scendere dallo zenit a questi punti, non potrà vedersi iride o primaria o secondaria nel Cielo.

PARTE SECONDA

TEORÌA DELLE MACCHINE OTTICHE

Natura delle Macchine Ottiche.

555. Tutto ciò che supposta la presenza della luce rende visibile un oggetto o lo altera in qualche modo nella grandezza, nella positura o nella distanza, dicesi *Macchina Ottica*. Così l'occhio sano che in virtù della sua prodigiosa struttura trasmette all'anima le distinte immagini degli oggetti e le rovescia (447), così l'acqua limpida che aumenta il diametro d'una porzion di cilindro immersovi obliquamente, che vi produce una sensibilissima piegatura e lo accosta alla superficie (534), sono due vere macchine ottiche, quantunque non sogliano ordinariamente ridursi a questo genere.

556. Ma poichè dei varj fini a cui può destinarsi una macchina ottica, il più interessante è l'aumento delle forze visive, perciò la teorìa, benchè si diriga talora anche all'opposte ricerche, si occupa principalmente in determinare non come possa impiccolirsi o allontanarsi un dato oggetto, ma per quali mezzi all'incontro o si ingrandisca se è troppo piccolo, o si avvicini se è troppo remoto, conservandogli, quando pure occorra, la sua natural situazione.

557. Una macchina ottica ha dunque per fondamento la presenza d'una luce e l'esistenza d'una forza visiva; è inutile nelle tenebre perfette e nella completa cecità: ma supposto del lume e della sensibilità nei nervi analoghi, ella ha lo stupendo potere di cangiar la distanza e le dimensioni dei varj oggetti, e per questo stesso di aprir la strada a una folla di scoperte che l'uomo cieco e l'occhio *disarmato* non avrebbero mai potute fare.

Dalla diversa combinazione delle lenti e degli specchi può aversi un'infinità di macchine ottiche; ma le principali e più comuni sono l'*Occhio*, l'*Occhiale*, il *Canocchiale* o *Teloscopio* e il *Microscopio*. La loro forza, o in generale i loro effetti, variano al variar delle combinazioni o di altre circostanze essenziali, come farà veder chiaramente la particolar teorìa di ciascheduna.

Occhio.

558. Il *nervo ottico* è l'istrumento fondamentale della visione (557); fabbricato in modo che le molecule lucide, per tutti gli altri nervi inefficaci, vivamente lo scuotano, egli solo può trasmetterne all'anima le impressioni con le corrispondenti idee degli oggetti visibili; ond'è che introdottosi nel *globo* ROR dell'occhio per una tenue apertura O, col suo esteriore integumento o *dura madre* forma il recinto o *tunica sclerotica* SS; coll'integumento seguente o *pia madre* produce la *tunica coroide* KK; e con la sostanza più delicata o *midolla* si spande in quell'intreccio reticolare RR che si chiama la *retina* e con cui interiormente vien terminato l'involucro dell'occhio. Su questa base fu ideata da Dio la macchina sorprendente di cui parliamo; poichè quantunque il dare ad un nervo la capacità di sentir l'impulso delle molecule quasi infinitesime della luce (434) e il forzarlo a stendersi in una gran superficie per accrescerne il sentimento, sia già l'essenziale della vi- 68.

sione; vi volea però molto di più per produrre il completo fenomeno della visione distinta. Bisognava 1°. risparmiare al possibile la delicatezza estrema del nervo, onde e non cagionasse dolore e non incallisse appoco appoco sotto il flagello continuato dei raggi lucidi; 2°. riunir questi raggi sempre divergenti (442) in un sol punto, onde venendo da limitata ma varia distanza, formassero sempre ben terminate sulla retina o sulla coroide l'immagini degli oggetti (445); senza contar poi che la macchina esigeva nel tempo stesso e semplicità, onde non disperdesse la luce (473), e mobilità, onde l'animale senza fatica se ne valesse, e custodia, onde l'azione dei corpi esterni a cui doveva esporsi, non la guastasse sì facilmente.

559. A tutto divinamente provvide la sapienza infinita
68. del Creatore. Primieramente nella coroide KVVK fece un apertura rotonda P, che si chiama la *pupilla*, e per questa sola permise alla luce di penetrar nell'interno dell'occhio; circondò la pupilla con l'*uvea* VV, gruppo mirabile di fibre circolari e rettilinee con tal arte intessute, che stirando le circolari, si allentano le rettilinee e la pupilla si stringe, mentre all'incontro forzate le rettilinee, si rilasciano le circolari e la pupilla si dilata; infine vestì la coroide d'una *tunica vasculare* donde per mille sottilissimi vasi traspuda un umore che tinge in nero o in bruno assai cupo la *tunica vellutata* su cui posa la retina: ciò che ha servito poi di modello all'industria degli uomini per annerire le interne pareti dei canocchiali e delle camere oscure. Così la pupilla limitò l'ingresso alla luce, l'uvea rese variabile secondo la forza e quantità del lume la grandezza della pupilla, e il nero interiore della coroide assorbendo i raggi irregolarmente venuti (506) impedì le riflessioni che avrebbero turbata la schiettezza delle immagini: tutto contribuiva, benchè per anche da lungi, alla grand' opera della visione distinta.

560. Per perfezionarla immaginò Dio una lente composta, ma d'un'artifizio sì particolare e sì perfetto, che la fina teorìa e la lunga pratica degli Ottici più valenti appe-

na ha potuto ai nostri giorni avvicinarvisi. Fece nascere alle due estremità della sclerotica SS una tunica trasparente e 68.
molto convessa CC, chiamata *cornea* in cui termina l'esteriore dell'occhio, e riempì tutto il vuoto tra CC e TT di un umore limpidissimo AA che per la sua somiglianza con l'acqua dicesi *umore aqueo*; quindi sospese dietro alla pupilla una lente convesso-convessa TT di raggi ineguali e di un umore più solido e più denso del primo, detto l'*umor cristallino*, e fece occupare ad un terzo *umore vitreo* EE men solido del cristallino, ma più viscoso e quasi egualmente denso che l'aqueo, la rimanente cavità dell'occhio da TT fino ad O. In tal guisa la cornea e l'umore aqueo formano un menisco, un altro ne forma l'umor vitreo, il cristallino è chiuso tramezzo a loro, e il tutto insieme costituisce la lente composta da cui risulta distintissima la visione. In fatti oltre il vantaggio che la prominenza della cornea procura all'occhio, facendogli abbracciare colla vista uno spazio o *campo* non minore d'un angolo retto, tale è poi l'economìa delle quattro refrazioni che soffre la luce nell'attraversar la cornea e i tre fluidi contigui, che non solo la divergenza o il parallelismo dei raggi è cangiato in convergenza, onde nell'atto di toccar la retina si riuniscono insieme in un sol punto: ma di più correggendosi le refrazioni scambievolmente fra loro, ciascuna immagine si presenta nettissima e senza quell'*iridi* o colori prismatici che la varia rifrangibilità dei raggi necessariamente produce nelle lenti semplici (545). E' vero che queste immagini son roversciate: ma ciò senza pregiudicar punto alla legittima percezion degli oggetti che la lunga esperienza ci mostra sempre nella loro natural positura, giova poi assaissimo ad evitar l'indebolimento e la dispersion della luce: si vedrà (583, 584) con quanto scapito di campo e di chiarezza giungano gli ottici a raddirizzare un'immagine che l'intersezion dei raggi in certe macchine ha roversciata; e facilmente s'intende che Dio non avrebbe mai moltiplicato a pura perdita il meccanismo dell'occhio.

561. Restava però tuttora una grande imperfezione a questa macchina; poichè supposto che i raggi lucidi si fossero esattamente riuniti alla retina quando l' oggetto ne era distante, per esempio, di 8 pollici, cangiata in più la distanza, non sarebbe stato possibile di riunirvegli, e la visione distinta avrebbe avuto il limite indivisibile d' un sol punto. Più mezzi adoprò il Creatore perchè si vedessero distintamente gli oggetti entro un più ampio confine: formò nella maggior parte degli animali la sclerotica assai flessibile per cagionare una mutazion di figura a tutto il globo dell' occhio, onde potesse ora accorciarsi ed ora allungarsi: attaccò l' umor cristallino a dei ligamenti che or distratti ed ora slentati, non solamente lo accostassero o lo rimovessero dalla pupilla, ma ne rendessero anche or più grande ed or più piccola la convessità: infine concesse un' azione al primo e più ampio anello o fibra circolare dell' uvea (559), il quale appartenendo egualmente alla cornea, la costringe a rialzarsi quando egli si contrae, e a comprimersi allorchè si rilascia. Ora è manifesto che tanto il moto della retina e del cristallino, quanto il cangiamento del cristallino e della cornea, eseguiti quasi senza avvedersene dall' animale, renderanno in ragion delle diverse distanze sì ben misurata la convergenza dei raggi lucidi, che il punto di riunione sarà sempre sul nervo ottico e produrrà sempre la visione distinta dentro i limiti assegnati alla forza dell' occhio.

Tale è l' essenziale artifizio della macchina lavorata da Dio; al che se si aggiunga il piccol numero e la stabilità dei pezzi che vi impiegò, il vario e facile movimento che per mezzo di sei muscoli le concesse, e i ripari delle palpebre, delle tempie, del naso e delle ciglia con cui la munì d' ogni intorno, si converrà senza pena che non hanno gli Ottici un più perfetto originale su cui dirigere i loro studj; e che intanto le loro invenzioni potranno meritar qualche stima, in quanto si accosteranno più da vicino all' eccellenza di questo esemplare.

Occhiale.

562. Allorchè la struttura dell' occhio o la soprabbondanza degli umori incurvano più del giusto il cristallino o la cornea, i raggi a', b' della loro sfericità divengon minori dei raggi a, b della sfericità ordinaria dell' occhio perfetto (*L.* 595.); e poichè $\frac{abqy}{(a+b)(p-q)y-abq} > \ldots\ldots \frac{a'b'qy}{(a'+b')(p-q)y-a'b'q}$, cioè la lunghezza focale (538) dell' ultimo supera quella del primo, se i raggi lucidi si riuniscono esattamente sulla retina dell' uno, anticiperanno la riunione nell' altro e la visione sarà confusa. Avverrà l' opposto qualora il cristallino per mancanza di umori si appiani oltre al dovere, ed a', b' essendo allora maggiori di a, b, la lunghezza focale in quest' occhio supererà quella dell' occhio ordinario, onde i raggi lucidi giungendo alla retina o tuttor divergenti o non affatto riuniti, la visione sarà del pari confusa. Il primo vizio suol manifestarsi in gioventù, e diconsi *miopi* gli occhi che vi son soggetti; il secondo è comune all' età provetta e l' occhio in tal caso si chiama *presbita*: le lenti concave sono il rimedio dell' uno, le convesse dell' altro, e quelle e queste prendono allora il nome d' *Occhiali*. Per mostrarne compiutamente gli effetti, ricerchiamo le generali proprietà della visione attraverso alle lenti.

563. Già si sa che se la grossezza della lente sia zero, 69.
l' immagine veduta col mezzo d' una lente piano-piana LL eguaglia l' oggetto (541): ma non è così se si calcoli la grossezza HK. Siano OG $= g$, IM $= g'$ le lineari grandezze dell'oggetto e dell' immagine; OCG $= a$, ICM $= b$ le lor grandezze apparenti; EH $= y$, CK $= e$ le distanze dell' oggetto OG e dell' occhio C dalla lente, ed HK $= c$ la grossezza di essa; sarà dunque EC $= y + c + e$ la distanza dell' oggetto dall' occhio, AK $= \frac{cq + py}{p}$ la distanza dell' immagine dal-

FIG.

69. dalla lente (541), ed AC $= e + \frac{cq+py}{p} = \frac{ep+cq+py}{p}$ la distanza dell' occhio dall' immagine che sempre è di là dalla lente (541). Ora poichè i raggi incidenti OB, GD son paralleli agli emergenti NC, PC (503), saranno simili i triangoli OFG, ICM, onde OG : IM :: EF : AC, ovvero (fatta HC [$= c + e$] : HF :: $m : n$ e perciò HF $= \frac{n(c+e)}{m}$ ed EF $= y + \frac{n(c+e)}{m}$ ove per la natura della refrazione (439) è sempre $m > n$) si avrà $g : g' :: y + \frac{n(c+e)}{m} : \ldots \frac{ep+cq+py}{p}$: ma quando l' immagine è assai piccola in confronto della sua distanza dall' occhio, abbiamo (451) $a : b :: \frac{g}{y+c+e} : \frac{g'p}{ep+cq+py}$; dunque $a : b :: \ldots\ldots \frac{y + \frac{n}{m}(c+e)}{y+c+e} : 1 :: my + n(c+e) : my + m(c+e)$; dunque poichè $m > n$, anche $b > a$, cioè *l' occhio per una lente piana di sensibil grossezza vedrà l' oggetto maggior del vero*.

564. Se nell' equazione $b = \frac{amy + am(c+e)}{my + n(c+e)}$ si faccia $e = 0$, sarà $b = \frac{amy + amc}{my + cn}$, valore più piccolo del primo; e se si faccia $y = 0$, sarà $b = \frac{am}{n}$, valore più grande del primo; cioè quando la lente tocca l' occhio, l' immagine è la minima, e quando tocca l' oggetto, è la massima. Che se si faccia $y = \infty$, sarà $b = a$; e se si faccia $e = \infty$, sarà $b = \frac{am}{n}$, cioè quando l' oggetto è lontanissimo dalla lente non vi è differenza tra l' oggetto e l' immagine, e la lente piana cessa d' esser macchina; ma quando la lente è lontanissima dall' occhio, l' immagine è la massima. Avendosi in oltre EC $= y + c + e$, AC $= \frac{ep+cq+py}{p}$ ed $y + c + e > \frac{ep+cq+py}{p}$, è manifesto che *la lente piana di sensibil grossezza avvicina l' oggetto all' occhio*, ed è

FIG.

facile il dimostrare che lo rende anche più chiaro; imperocchè se sia C un punto lucido dell' oggetto e OG la larghezza della pupilla, tutti i raggi tra CN e CP saranno introdotti nell' occhio dalla lente LL, tolta la quale è perduto per lui quanto vi è di luce tra QO e GR. 69.

La lente piana è dunque una macchina ottica: ma l' occhiale che volesse comporsene, sarebbe di molto incomodo per la grossezza che ella esige, e di pochissimo vantaggio per la troppa vicinanza dell' occhio. Tra le curiosità ottiche si trovano delle *lenti poliedre* cioè sfaccettate da una parte e piane dall' altra: i raggi venuti da un medesimo punto lucido soffrono in ciascuna faccia una diversa refrazione e giungono all' occhio come se procedessero da punti diversi; di quì è che ciascun punto dell' oggetto, e perciò anche l' oggetto medesimo per mezzo della lente poliedra si vede moltiplicato (447). Gli occhiali piani di color giallo sono un trastullo puerile: più vantaggiosi possono essere i verdi; poichè quantunque le lenti piane e sottili onde son fatti, tolgan loro l' essenza delle macchine ottiche (541), il verde però come colore intermedio (505), è attissimo a conservar la vista e a difender la retina dall' impressione troppo violenta o troppo continuata dei raggi riflessi del Sole ec.

565. Venghiamo ora alle lenti concave, e ritenendo le denominazioni di sopra, sia al solito la grossezza eguale a zero ed f la principal lunghezza focale: sarà dunque $y + e$ la distanza dell' oggetto dall' occhio, $\frac{fy}{f+y}$ la distanza dell' immagine dalla lente (543), ed $e + \frac{fy}{f+y} = \ldots\ldots \frac{ef+ey+fy}{f+y}$ la distanza dell' occhio dall' immagine che è sempre al di là della lente (538). Se dunque l' immagine in paragone della sua distanza dall' occhio sia assai piccola, avremo (451) $a : b :: \frac{g}{y+e} : \frac{g'(f+y)}{ef+ey+fy}$: ma (540) $g : g' :: 1 : \frac{f}{f+y}$; dunque $a : b :: \frac{1}{y+e} : \frac{f}{ef+ey+fy} :: ey +$

$f(y+e):f(y+e)$; dunque poichè $ey>0$, anche $a>b$, cioè *l' occhio per mezzo d' una lente concava vedrà l' oggetto minor del vero.*

566. Se nell' equazione $b=\frac{af(y+e)}{ey+f(y+e)}$ si faccia $e=0$ ovvero $y=0$, sarà $b=a$, cioè quando la lente tocca l' occhio o l' oggetto, l' immagine eguaglia l' oggetto, e la lente concava non è più macchina. Ma se $e=\infty$ ovvero $y=\infty$, sarà $b=\frac{af}{y+f}$ ovvero $b=\frac{af}{e+f}$, valori che essendo più piccoli di $\frac{af(y+e)}{ey+f(y+e)}$, ci dimostrano che quando l' occhio o l' oggetto son lontanissimi dalla lente, l' immagine è la minima. Essendo inoltre $y+e>\frac{ef+ey+fy}{f+y}$, è manifesto che la lente concava accosta l' oggetto all' occhio: attesa però la maggior divergenza che in essa acquistano i raggi (531), toglie molta luce alla pupilla, onde per una ragione opposta all' apportata di sopra (564) rende l' oggetto men chiaro.

567. Intanto a questa divergenza debbono i miopi il miglioramento della lor vista; poichè impedendosi con una lente concava la troppo rapida riunione dei raggi, se la concavità sia proporzionata al particolar vizio del miope, i coni lucidi prolungheranno il vertice fino alla retina e la visione diverrà distinta. Già s' intende che per gli oggetti assai vicini, i quali inviano divergentissimi i loro raggi e non gli lasciano riunir sì presto, l' occhio miope non ha bisogno di macchina: ma quando l' oggetto si trovi a qualche intervallo dall' occhio onde i suoi raggi poco divergenti e quasi paralleli vi convergano in fretta, allora la macchina giocherà con successo, e ad onta della luce dispersa e dell' immagine impiccolita mostrerà l' oggetto distintamente.

568. Son più varj i fenomeni delle lenti convesse. Supposto un oggetto la cui distanza dalla lente sia minore della principal lunghezza focale f, e ritenute al solito le denominazioni di sopra, sarà $y+e$ la distanza dell' oggetto dall' occhio, e poichè per ipotesi $f>y$, sarà $\frac{fy}{f-y}$ la distanza dell' immagine dalla lente (543) ed $e+\frac{fy}{f-y}=\frac{ef+fy-ey}{f-y}$ la distanza dell' occhio dall' immagine che in questo caso è di là dalla lente (538). Ripetuto pertanto il precedente raziocinio (565), avremo $a:b::f(y+e)-ey:f(y+e)$; dunque poichè $0>-ey$, anche $b>a$, cioè *l' occhio per mezzo d' una lente convessa vedrà in questo caso l' oggetto maggior del vero.*

569. Se nell' equazione $b=\frac{af(y+e)}{f(y+e)-ey}$ si faccia $e=0$ ovvero $y=0$, sarà $b=a$ come sopra (566), e la lente convessa non è più macchina: ma se $e=\infty$, sarà $b=\frac{af}{f-y}$, valore, che superando $\frac{af(y+e)}{f(y+e)-ey}$ dimostra che quando l' occhio è lontanissimo dalla lente si ha la massima immagine. Essendo poi $\frac{f(y+e)-ey}{f-y}>y+e$, è manifesto che la lente convessa allontana l' oggetto dall' occhio; ma attesa la minor divergenza dei raggi, cioè per la ragion contraria alla già portata per le lenti concave (566), lo rende anche più chiaro.

570. Questa minor divergenza giova mirabilmente al presbita che vedendo assai bene un oggetto lontano perchè i suoi raggi quasi paralleli hanno bisogno di poca refrazione per riunirsi alla retina, non distingue poi gli oggetti i più vicini, la divergenza de' cui raggi non può esser vinta dalla debole convessità del cristallino. Una lente convessa rimedia al disordine, mentre inviando all' occhio i raggi molto più convergenti dei naturali, forza il cono lucido ad accorciarsi e ad appoggiare il suo vertice sulla retina, dal che nasce, come tante volte si è detto, la visione distinta.

571. Fin quì abbiamo supposto $f>y$ (568); ma se sia $y>f$, l' immagine sarà sempre di quà dalla lente, ed ora potrà esser l' occhio tra la lente e l' immagine, ora l' immagine tra la lente e l' occhio. Nel primo caso (in cui però la visione per un occhio sano è confusa perchè vi entrano assai convergenti i raggi (538) che la sua struttura esi-

ge o divergenti o paralleli (560)), sarà $\frac{fy}{y-f}$ la distanza dell'immagine dalla lente (543), ed $\frac{fy}{y-f} - e = \frac{f(y+e)-ey}{y-f}$ la distanza dell'occhio dall'immagine, onde $b = \frac{af(y+e)}{f(y+e)-ey}$ e l'ingrandimento dell'oggetto si avvererà come prima (568); di modo che se $y=f$ (nel qual caso i raggi entrano paralleli nell'occhio (538) e la visione è distinta (560)), sarà $f(y+e)-ey=f^2$ ed $a:b::f^2:f(e+f)::f:e+f$, cioè l'immagine diverrà maggiore a misura che $e+f$ supererà f o che l'occhio si allontanerà dalla lente, purchè resti sempre tra la lente e l'immagine.

572. All'incontro se essendo $y>f$, l'immagine sia tra l'occhio e la lente, avremo $e-\frac{fy}{y-f}=\frac{ey-f(y+e)}{y-f}$ per la distanza dell'occhio dall'immagine, e quindi $a:b::ey-f(y+e):f(y+e)$, ove posto $y=\infty$, sarà $a:b::e-f:f$, onde se $e>2f$, sarà $e-f>f$ ed $a>b$; se $e<2f$, sarà $a<b$; e se $e=2f$, sarà $a=b$, cioè *l'immagine d'un oggetto lontanissimo comparirà minore, maggiore o eguale all'oggetto secondochè la distanza dell'occhio dalla lente sarà maggiore, minore o eguale al doppio della principal lunghezza focale*. Si troverà facilmente che se l'occhio fosse tra la lente e l'immagine, ed y come sopra $=\infty$, si avrebbe $a:b::f-e:f$, onde generalmente $a:b::f\backsim e:f$.

573. Infine l'immagine si avrà dalle lenti diritta o roverscia relativamente all'oggetto, quando essi saranno o dalla parte medesima o l'una al di quà e l'altro al di là della lente, nel quale ultimo caso solamente può avvenire l'intersezione dei raggi (446). E si osservi che se gli occhiali convessi situati nel loro luogo ordinario non roverscian l'immagine, ciò succede perchè $e<\frac{fy}{y-f}$ come dicemmo (571) cioè l'occhio riceve i raggi lucidi prima che si sieno intersecati. Per veder l'immagine roverscia conviene che ella cada tra l'occhio e la lente (572) onde si abbia $e>\frac{fy}{y-f}$;

FIG.

e poichè l'intervallo e nella comune situazion degli occhiali è molto piccolo, dovrebbe $\frac{fy}{y-f}$ esserlo anche di più, il che esigendo una convessità mostruosa e fuori d'uso, non bisogna stupirsi se coi comuni occhiali un oggetto si mostra sempre nella sua natural positura.

Canocchiale.

L'ingrandimento dei lontanissimi oggetti ottenuto dalle semplici lenti convesse (572) non si trovò tanto sensibile da valersene con successo nell'immensa distanza degli Astri e nei tratti sterminati dell'Oceano e della Terra. Fu dunque pensato a dei sistemi di lenti variamente combinate, cioè a macchine ottiche più composte e perciò più efficaci, onde oltrepassare i limiti in cui son ristrette le semplici. Questi sistemi portano il nome di *Canocchiali*; le canne o tubi in cui stanno le lenti, sono interiormente anneriti (559) e possono slungarsi ed accorciarsi a piacere (561); la lente situata alla più ampia estremità del canocchiale e più vicina all'oggetto si chiama *objettivo*, l'altre più prossime all'occhio, in qualunque numero sieno, diconsi *oculari*, e non è l'esterior dimensione dei tubi, ma la principal lunghezza focale dell'obiettivo che determina la *lunghezza* del canocchiale.

574. Il miglior sistema (a cui si riducono tutti quelli che sono in uso) porta un obiettivo convesso VV con un 70.
oculare parimente convesso C′C′, e dagli Astronomi che anche oggidì se ne vagliono, fu detto *Astronomico*. Sieno $Eu=y=\infty$ ed $uO'=e$ le distanze dell'oggetto remotissimo GG e dell'occhio O′ dall'objettivo VV la cui principal lunghezza focale sia $uF=f$, e si suppongano al solito a, b l'apparenti grandezze dell'oggetto e dell'immagine. Poichè $y=\infty>f$ e l'immagine in F è tra l'occhio O′ e la lente VV, avremo (572) $a:b::e-f:f$ e perciò $b=\frac{af}{e-f}$. Ora se l'oculare C′C′ si collochi di quà da F in p talmente che il fuoco stesso F di VV ne sia il fuoco principale, i ce-

FIG. 70. ni lucidi attraversando $C'C'$ si cangieranno in cilindri, cioè i raggi di ciascun punto dell' immagine F usciranno paralleli (538) e l'immagine stessa diventerà per l'occhio O' un nuovo oggetto la cui immagine uscita per $C'C'$ si allontana all' infinito. Posta dunque $Fp = y'$ ed $O'p = e'$ le distanze dell' oggetto F e dell' occhio O' dall' oculare $C'C'$, la cui principal lunghezza focale $Fp = y' = f'$, saranno $b \left(= \frac{af}{e-f}\right)$ e b' le grandezze apparenti del nuovo oggetto e della sua immagine onde poichè $y' = f'$ e l' occhio O' è tra la lente $C'C'$ e l'immagine infinitamente distante, si avrà (571) $\frac{af}{e-f} : b' :: f' : e' + f'$, e perciò $b' = \frac{af(e'+f')}{f'(e-f)}$; ma $e' + f' = O'p + pF = O'F = O'u - uF = e - f$; dunque $b' = \frac{af}{f'}$ ed $a : b' :: f' : f$ cioè *nel canocchiale astronomico la grandezza apparente dell' oggetto sarà a quella dell' immagine come la principal lunghezza focale dell' oculare a quella dell' objettivo.*

575. Dunque 1°. giacchè nell' equazione $b' = \frac{af}{f'}$ non entra la distanza della lente dall' occhio, l' immagine conserverà la stessa apparente grandezza ovunque egli si collochi. Per altro la sua miglior situazione sarà nel punto O' poco sotto al fuoco f' della lente $C'C'$, ove riceverà tutti quasi i cilindri di luce, i quali forzati dalla refrazione ad intersecarsi, occupano necessariamente un piccolo spazio $O'f'$, d' onde poi cominciando a divergere entrerebbero in minor quantità nella pupilla, ed il *campo* o area visibile diminuirebbe.

576. Dunque 2°. giacchè $a : b' :: f' : f$, e in due lenti *isosceli* convesso-convesse dei raggi r, r', si ha $f = r$, $f' = r'$ (542), quanto r sarà maggior di r', tanto l' apparente grandezza dell' immagine supererà quella dell' oggetto; e se l' objettivo sia piano-convesso, onde $f = 2r$ (542), l' immagine comparirà ancor più grande.

577. Dunque 3°. supposto $r > r'$ ovvero $f > f'$, se il canocchiale si roversci, onde l' objettivo VV divenga oculare e l' oculare $C'C'$ divenga objettivo, si avrà $O'p = y = \infty$, $pF = h$, $Eu = h'$, $Ep = e$, $Eu = e'$, e in forza del raziocinio di sopra (574), $a : b' :: h' : h$; ma $h = f'$, $h' = f$ e per ipotesi $f > f'$; dunque $h' > h$ ed $a > b'$, cioè l' immagine comparirà più piccola dell' oggetto nella ragion medesima in cui col canocchiale diritto comparisce più grande.

578. Dunque 4°. l' immagine essendo in somma lo stesso oggetto più o meno avvicinato, le lineari grandezze g', g dell' una e dell' altro sono assolutamente eguali e perciò (452) $a : b' :: d' : d$: ma $a : b' :: f' : f$ (574); dunque $d' : d :: f' : f$ cioè *le distanze dell' immagine e dell' oggetto sono come le principali lunghezze focali dell' oculare e dell' objettivo.* Quindi *il canocchiale roversciato mostrerà l' immagine non solo più piccola* (577) *ma anche più remota* nella ragione di h' ad h ovvero di f ad f'.

579. Dunque 5°. se si rifletta che per l' occhio inerme tanta è la chiarezza c dell' oggetto quanta è la luce che può entrar nell' area $n^2\pi$ (L. 606) della pupilla, mentre per l' occhio armato è tanta la chiarezza c' dell' immagine quanta è la luce che penetra nell' *apertura* o area $m^2\pi$ dell' objettivo, converrà concludere $c : c' :: n^2 : m^2$, cioè *le chiarezze dell' oggetto e dell' immagine saran tra loro come i quadrati dei raggi dell' apertura della pupilla e dell' objettivo.* Onde se con due telescopj d' ineguali dimensioni, ma di eguale struttura e bontà, si osservi da un luogo stesso uno stesso oggetto, si avrà (574) $\frac{b'}{a} = \frac{f}{f'}$, $\frac{\beta'}{a} = \frac{\varphi}{\varphi'}$, e $b' : \beta' :: \frac{f}{f'} : \frac{\varphi}{\varphi'}$; perciò le chiarezze c', k' dell' immagini che davano l' analogia $c' : k' :: \frac{cm^2}{n^2} : \frac{c\mu^2}{n^2} :: m^2 : \mu^2$, essendo ora di più in ragione inversa dei quadrati delle lor grandezze $\frac{f}{f'}$, $\frac{\varphi}{\varphi'}$ (443), troveremo $c' : k' :: \frac{\varphi^2 m^2}{\varphi'^2} : \frac{f^2 \mu^2}{f'^2} :: \frac{f'^2 m^2}{f^2} : \frac{\varphi'^2 \mu^2}{\varphi^2}$, cioè *le chiarezze delle due immagini sono come il quadrato delle principali lunghezze focali degli oculari,*

FIG. *moltiplicato per il quadrato dei raggi dell' apertura dell' objettivo e diviso per il quadrato delle principali lunghezze focali dello stesso objettivo.*

580. Dunque 6°. giacchè i raggi trasmessi da ciascun
70. punto dell' oggetto escono paralleli dalla lente C′C′, l' immagine sarà veduta distintamente dall' occhio sano (561) e dal presbita (570), ma riuscirà confusa per l' occhio miope, nè diverrà distinta per lui se l' oculare C′C′ non si avvicini alquanto all' objettivo VV, onde i raggi uscendo da C′C′ divergenti (538), vadano a riunirsi esattamente sulla sua retina (567).

581. Dunque, 7°. giacchè i raggi dei coni lucidi si segano in F, l' immagine vi si roverscierà (573) onde l' occhio che la riceve di quà da F in O′ la vedrà roverscíata.

582. Se quest' ultima proprietà del canocchiale astronomico giova (560) all' osservator celeste poco sollecito del roversciamento degli astri, confonde in molti casi il terrestre che più non ravvisa certi oggetti allorchè gli si presentano roverscíati. In due modi specialmente possono raddirizzarsi l' immagini, e da ciascuno di essi è nato un nuovo sistema di lenti o canocchiale. Il primo o inventato o con gran successo adoperato da Galileo, fu detto *Galileano* in cui alla lente convessa C′C′ si sostituisce la concava LL che come C′C′, ha il suo fuoco in F, con questa sola differenza che C′C′ perchè convessa, era al di quà del fuoco, ed LL perchè concava, ne è al di là. Con ciò, ritenute le denominazioni di prima (574), osservando che $O'N = e'$, che l' apparente grandezza della nuova immagine è $-b'$ e che $NF = f' = -y'$ mentre nella costruzion della formula (565) si suppose di là dalla lente ciò che ora è di quà, avremo (566) $-b' = \frac{bf'(e'-f')}{-e'f'-f'^2+e'f'}$ ovvero $b' = \frac{b(e'-f')}{f'}$ ovvero sostituito a b il suo valore $\frac{af}{e-f}$ (574), $b' = \ldots$ $\frac{af(e'-f')}{f'(e-f)}$: ma $e'-f' = O'N - NF = FO' = O'u - uF = e-f$; dunque $b' = \frac{af}{f'}$ come sopra (574).

583. Dunque anche in questo canocchiale può collocarsi l' occhio ove piace (575): ma poichè i cilindri lucidi escono dalla lente LL assai divergenti (531), quanto la pupilla ne sarà più distante tanto men di cilindri potrà ricevere e 70.
tanto sarà più piccolo il campo: quindi il luogo più vantaggioso per l' occhio è il punto o vicinissimo alla lente. Tutte l' altre proprietà dell' Astronomico (576.... 580) convengono al telescopio Galileano, ma non si vedrà in questo l' immagine roverscíata, perchè i raggi in luogo di riunirsi in F ove l' inversione accaderebbe, se ne discostano all' uscir dalla lente insieme coi cilindri di cui son parte, e non permettono all' immagine di roverscíarsi. Intanto siccome crescendo la lunghezza focale f, cresce anche l' apparente grandezza o angolo $b' = \frac{af}{f'}$, onde la pupilla tuttochè situata in o, riceve una quantità sempre più piccola di quei cilindri, e si ristringe anzi a misura della maggior copia di luce (559), è chiaro che *in questo sistema di lenti non possono mai star bene insieme la chiarezza dell' oggetto, la lunghezza del telescopio e l' ampiezza del campo*. Questo difetto ha ributtati gli Astronomi, e quel canocchiale con cui Galileo fece nel Cielo delle scoperte sì sorprendenti, non si usa ormai che nei Teatri, ove basta una piccola lunghezza focale per avere in un giusto campo un sufficiente ingrandimento.

584. Nel secondo sistema che può variarsi infinitamente, si uniscono più oculari C′C′, C″C″, C‴C‴ ec. talmente disposte che l' immagine FH dell' oggetto EG ($= a$) fatta dalla prima lente VV divenga oggetto per la seconda C′C′, e la nuova immagine $f'h'$ divenga oggetto per la terza C″C″ e così di seguito. Poste le distanze focali uF, pf', sf'', tf''' ec. $= x, x', x'', x'''$ ec. ed Eu, Fp, $f's$, $f''t$ ec. $= y, y', y'', y'''$ ec., si avrà (540) $uE : EG :: uF : FH = \frac{ax}{y}$; $pF : FH :: pf' : f'h' = \frac{axx'}{yy'}$ e proseguendo, sarà generalmente dopo $n+1$ lenti, cioè dopo n oculari $f^{(n)}h^{(n)} =$

FIG.

70. $a \times \frac{x x' x'' \ldots x^{(n)}}{y y' y'' \ldots y^{(n)}}$, ove si osservi 1°. che la sola y quì necessariamente è positiva, mentre le y', y'' ec. e le x, x', x'' ec. possono essere o positive o negative, purchè però siano positivi i valori $x + y'$, $x' + y''$ ec. i quali esprimono le distanze tra lente e lente, e possono solamente divenir zero quando le lenti sono al contatto. 2°. che quando son negative le x o le y (e queste seconde lo sono ogni volta che $x > x + y'$, $x' > x' + y''$ ec. cioè la distanza focale eccede quella delle due lenti contigue), son negative le quantità $\frac{x}{y'}$, $\frac{x'}{y''}$ ec. e l' immagine allora non si roverscia, anzi nemmeno è reale (486), non vi essendo unione di raggi. 3°. perciò il solo numero delle *immagini reali* determina la situazione o diritta o roverscia dell' ultima presentata all' occhio, secondo che questo numero è pari o impari: 4°. che quando una delle y (quì suppongo convesse tutte le lenti) eguaglia la distanza focale della lente, per esempio $y^{(m)} = f^{(m)}$, la corrispondente $x^{(m)} = \infty$ (538) e quindi i raggi emergendo paralleli, cadono tali sulla lente che segue, onde $y^{(m+1)} = \infty$ e la corrispondente $x^{(m+1)} = f^{(m+1)}$ ec. (538). Perciò se si abbia un sistema di *quattro lenti* in cui sieno eguali le *tre oculari* ed abbiasi $y = \infty$, $y' = f' = f'' = f'''$, sarà $x = f$, $x' = \infty$, $y'' = \infty$, $x'' = f''$, $x''' = \infty$ ed $f''' h''' = a \frac{x x' x'' x'''}{y y' y'' y'''} = a \frac{f . \infty . f'' . \infty}{\infty . f' . \infty . f'''} = \ldots a \frac{f f''}{f' f'''} = \frac{af}{f'}$ come nel canocchiale di due sole lenti (574); ove l' immagine che a motivo di x' ed y'' infiniti non si riproduce tra C'C' e C''C'', si forma e si roverscia di nuovo tra C''C'' e C''' C''': onde l' immagini reali essendo due, quella che presentasi all' occhio è raddirizzata come ricercasi per il *canocchiale terrestre*.

585. Sia ora z la grandezza angolare di EG veduta dall' occhio inerme nella distanza $y + e$ (onde $y + e : a :: 1 :$

tang z

FIG.

$tang\, z = z$ (L. 707. II.) $= \frac{a}{y + e}$), i la grandezza lineare dell' immagine veduta dall' occhio armato nella distanza k, ed ω la sua grandezza angolare (per cui $k : i :: 1 : tang\, \omega = \omega = \frac{i}{k}$), sarà $\frac{\omega}{z} = \frac{i(y + e)}{ak}$ l' ingrandimento angolare m dell' oggetto EG; e poichè $i =$ FH, $= f' h'$, $= f'' h''$ ec. $= \frac{ax}{y}$, $= \frac{a x x'}{y y'}$, $=$ ec., si avrà supponendo una sola lente, $m = \frac{x (y + e)}{yk}$; supposte due lenti, $m' = \frac{x x' (y + e)}{y y' k}$ e generalmente supposte $n + 1$ lenti, $m^{(n)} = \ldots\ldots\ldots \frac{x x' x'' \ldots x^{(n)} (y + e)}{y y' y'' \ldots y^{(n)} . k}$; ove si noti che se l' oggetto è lontano, si ha $y = \infty = y + e$ (442) e la distanza k da cui l' occhio riceve i cilindri lucidi dell' immagine è indeterminata e può farsi $= \infty = x^{(n)}$, dovendo $x^{(n)}$ esser $= \infty$ acciò sien paralleli i raggi emergenti dall' ultima lente (571): ma l' oggetto essendo vicino assai, $y < y + e$, e $k = y + e$ sarà la distanza ordinaria da cui un occhio sano distingue perfettamente l' oggetto, che si suppone comunemente 8 pollici. Di quì ancora si vede che nel canocchiale terrestre potrebbe combinarsi il numero e l' acutezza dell' oculari in modo da aumentare assai l' ingrandimento: ma convien riflettere che se l' objettivo non sia dell' ultima perfezione e l' oggetto non sia ben illuminato, l' ingrandimento si fa a scapito della chiarezza, e l' immagine comparisce *mal terminata*.

586. Poichè frattanto la chiarezza dell' immagine dipen- 70.
de dalla quantità dei raggi vibrati utilmente da un punto E dell' oggetto sull' objettivo VV, i quali passando per tutte le lenti giungono alla pupilla, sarà bene determinar l' ampiezza che il cono lucido acquista sopra ogni lente. Chiamo u il semidiametro uV dell' objettivo ed ho uF (x) : uV (u) :: Fp (y') : pC' $= \frac{uy'}{x}$ raggio dello spazio che occupa sul-

FIG. la seconda lente cioè sul primo oculare $C'C'$ il cono VRV; per la stessa ragione $f'p\,(x') : pC'\left(\frac{uy'}{x}\right) :: f's\,(y'') : sr = \frac{uy'y''}{xx'}$ raggio dello spazio che abbraccia sulla terza lente o sul secondo oculare $C''C''$; e generalmente sull' oculare n^{mo} l' ampiezza del cono o cilindro lucido avrà per raggio $\rho = \frac{uy'y'' \ldots y^{(n)}}{xx'x'' \ldots x^{(n-1)}}$; d' onde eliminando il fattore $y'y'' \ldots y^{(n)}$ preso dai valori di m, m' ec. trovati sopra (585), si avrà $\rho = \frac{u(y+e)x^{(n)}}{ym^{(n)}k}$, cioè facendo $k = x^{(n)}$ (585) sarà generalmente $\rho = \frac{u(y+e)}{ym}$ ovvero $= \frac{u}{m}$ se $y = \infty = y + e$. Chiamando r il semidiametro della pupilla, se ρ sia eguale o maggior di r, la chiarezza dell' ultima immagine sarà la massima, supposto che l' oggetto non venga illuminato di più: ma se $\rho < r$, la chiarezza attuale sarà alla massima possibile $:: \rho^2 : r^2 :: \left(\frac{u(y+e)}{ym}\right)^2 : r^2$.

587. Che se si cerchi l' ampiezza da darsi a ciascuna lente, onde si scuopra un dato *campo* GuG, sia
70. $GuC'O'C''O''C'''O'''h'''$ il raggio estremo che attraversa tutte le lenti. Si avrà 1°. $uF\,(x) : FH\,(i) :: up\,(x+y') : pC' = \frac{(x+y')i}{x} = A'$ raggio dell' apertura del primo oculare; 2°. per i triangoli simili $O'pC'$, $O'sC''$, $O'f'h'$ si ha $O'p : O'f' :: pC' : f'h'$, ed $O's : O'f' :: sC'' : f'h'$; la prima proporzione dà $O'p + O'f'\,(= pf' = x') : pC' + f'h'\,(= A' + i') :: O'f' : f'h'$; la seconda dà $O's - O'f'\,(= f's = y'') : sC'' - f'h'\,(= sC'' - i') :: O'f' : f'h'$; quindi $x' : A' + i' :: y'' : sC'' - i'$, e infine $sC'' = \frac{A'y'' + (x'+y'')i'}{x'} = A''$: nel modo stesso si troverà $tC''' = \frac{A''y''' + (x''+y''')i''}{x''} = A'''$ ec. ove sostituiti i valori di x, y dati dal sistema delle lenti, si ha l' apertura loro dovuta e l' ampiezza del cam-

po sulla quale, come è evidente, non influiscono che le lenti oculari: e poichè queste non possono oltrepassare una certa ampiezza (532), anche il campo del canocchiale non eccede mai certi limiti. FIG.

588. Di quì finalmente ricavasi la distanza del punto O', O'' ec. ove dee collocarsi l' occhio perchè la pupilla abbracci un campo maggiore. Poichè la proporzione stessa di 70.
sopra ci dà $pO' : pO' + O'f'\,(= pf' = x') :: pC'\,(A') : pC' + f'h'\,(= A' + i')$ e quindi $pO' = \frac{A'x'}{A'+i'}$ e nel modo stesso $sO'' = \frac{A''x''}{A''+i''}$, $tO''' = \frac{A'''x'''}{A'''+i'''}$ ec.

589. Due difetti naturalmente accompagnano tutti i canocchiali di cui abbiamo data la teorìa. L' uno può chiamarsi *aberrazione di sfericità*, ed è il deviamento dei raggi dal punto o fuoco geometrico in cui dovrebbero riunirsi e dal quale intanto la sfericità dell' objettivo gli allontana (531). Oscurando in fatti questa lente con una sostanza opaca e scoprendone quindi o un piccol circolo intorno al centro o una piccola zona intorno all' orlo, l' *immagine principale* nel primo caso e *l' immagine estrema* nel secondo si trovano in luoghi assai diversi dell' asse, e resta tra l' una e l' altra uno *spazio di diffusione*, il quale scoperta affatto la lente, si riempie tutto d' immagini corrispondenti alla varia inflessione che danno ai raggi le zone intermedie. Or poichè queste immagini, quantunque non molto vive, son però tanto più numerose quanto è più grande l' apertura o area dell' objettivo, è forza che l' immagine principale ne riesca sensibilmente torbida e nuvolosa. L' altro difetto può chiamarsi *aberrazione di rifrangibilità*, mentre si è veduto (545) che i raggi paonazzi tagliano l' asse molto più presto dei rossi; onde lo spazio tra gli uni e gli altri è occupato dalle cinque specie intermedie secondo la loro varia rifrangibilità: i più vicini ai rossi, come gli aranciati e i gialli, attraversan l' immagini più remote e le rendon confuse; i più lontani come i celesti e i turchini, le rasentano e le cingono intorno d' *iridi* o zone colorate, e tutti insie-

FIG.

me ne distruggono ogni nettezza.

590. Intorno a questa doppia aberrazione nulla è più ingegnoso del raziocinio che persuase Nevvton a preferire ai diottrici i telescopj *catadiottrici* o di riflessione. Immaginato nella lente piano-convessa ΩOI un raggio qualunque
64. RT parallelo a ΦO che rifrangendosi incontri in H il raggio estremo QA (544) e in K l' asse ΦE, si conduca HL normale all' asse: è chiaro che l' effetto della sfericità è di far crescer continuamente l' angolo TKO dal nulla fino all' angolo IfO (531), e di far continuamente scemare la retta Kf da Ef quando TK coincide con ΦE, fino a nulla quando TK coincide con If: onde HL in qualche luogo dee necessariamente divenir massima, e allora tutti i raggi lucidi passeranno per il circolo del semidiametro HL che sarà perciò il semidiametro dell' aberrazione di sfericità. Sieno dunque le variabili $GN = TV = z$, $HL = x$, e le costanti $NQ = IN = a$, $fF = b$, $Nf = f = VK$ che tendendo continuamente a divenire eguali, poco differiscon tra loro (L. 999.), e avremo $FA = \frac{ab}{f}$ ed $fL = \frac{fx}{a}$ attesi i triangoli simili QNf, AFf, HLf. Ora giacchè il raggio If si scosta di $Ff = b = \frac{p^2 NQ^2}{2(p-q)^2 FO}$ (544), onde anche l' altro scostamento $FK = \frac{p^2 TV^2}{2(p-q)^2 FO}$ e quindi $Ff\,(b) : FK :: NQ^2\,(a^2) : TV^2\,(z^2)$, sarà $FK = \frac{bz^2}{a^2}$ ed $fK = fF - FK = \frac{b}{a^2}(a^2 - z^2)$: ma $TV\,(z) : VK\,(f) :: HL\,(x) : LK = \frac{fx}{z}$; dunque $fK = fL + LK = \frac{fx}{a}\left(\frac{z+a}{z}\right) = \frac{b}{a^2}(a^2 - z^2)$ ovvero $x = \frac{bz}{f} - \frac{bz^2}{af}$ che dee essere un massimo: perciò (L. 1043) $\frac{dx}{dz} = \frac{b}{f} - \frac{2bz}{af} = 0$, $z = \frac{a}{2} = \frac{IN}{2}$, $x = \frac{ab}{4f} = \frac{FA}{4}$ e $2x = \frac{FA}{2}$ cioè *il diametro del circolo dell' aberrazione di sfericità eguaglia la metà dello scostamento laterale del raggio estremo* QA, e poichè $FA = \frac{p^2 sen^3 a}{2q^2 CO^2}$ (544), sarà $2x$

FIG.

$= 2HL = \frac{p^2 sen^3 a}{4q^2 CO^2}$; cosicchè fatto $p = 31$, $q = 20$, $sen\ a = 2^{poll.}$, $CO = 600^{poll.}$, avremo $2HL = \frac{31^2 \cdot 2^3}{20^2 \cdot 1200^2} = \ldots$ 64.
$\frac{961}{72000000}$, diametro dell' aberrazione di sfericità: ma il diametro dell'abberrazione di rifrangibilità è $\frac{2\,sen\,a}{55} = \frac{4}{55}$ (545); dunque le due aberrazioni stanno tra loro come $\frac{961}{72000000} : \frac{4}{55} :: 1 : 5449$, cioè l' aberrazione di sfericità è un nulla in confronto dell' aberrazione di rifrangibilità, la quale o non avendo luogo o essendo insensibile negli specchi, è manifesto che i canocchiali catadiottrici sono esenti dal difetto più grande che accompagna i diottrici.

591. Per meglio assicurarci, paragoniamo anche tra loro le aberrazioni di sfericità in uno specchio concavo e in una lente piano-convessa eguali d' apertura e di principal lunghezza focale. Nello specchio si ha $fF = \frac{1 - cos\,i}{2\,cos\,i}$ (495), 58.
e poichè l' apertura $IO = a$ è piccola come si suppose già nella lente (544), onde Ff, NO son piccolissime e $cos\,i = 1$ presso a poco, sarà $fF = \frac{1 - cos\,i}{2} = \frac{ON}{2}$ incirca: ma $ON = \frac{NQ^2}{CO + CN}$ (L. 563) $= \frac{sen^2 a}{1 + cos\,i} = \frac{sen^2 a}{2} = \frac{sen^2 a}{2CO}$, perchè $CO = 1$; dunque $fF = \frac{sen^2 a}{4CO}$ ed $FA = \frac{Ff \cdot NQ}{Nf} = \frac{Ff \cdot NQ}{\frac{1}{2} OC}$ $= \frac{sen^3 a}{2CO^2} = \frac{sen^3 a}{8OF^2}$ (486). Pertanto se il raziocinio fatto di sopra per le lenti (590) si ripeta quì per gli specchi a cui si applica interamente, il diametro dell' aberrazione di sfericità nello specchio concavo eguaglierà la metà dello scostamento laterale $\frac{sen^3 a}{8OF^2}$ del raggio estremo QA e sarà $\frac{sen^3 a}{16OF^2}$: ma nella lente è $\frac{p^2 sen^3 a}{4(p-q)^2 OF^2}$ (544, 590); dunque le due aberrazioni stanno fra loro come $\frac{sen^3 a}{16OF^2} : \frac{p^2 sen^3 a}{4(p-q)^2 OF^2} :: \frac{1}{4} :$

$\frac{p^2}{(p-q)^2}$ :: 121 : 3844 :: 1 : 32 , cioè l'aberrazione di sfericità nello specchio in confronto dell'aberrazion medesima nella lente è pochissima cosa ; nuova ragione per dare ai canocchiali catadiottrici la preferenza . Al che se si aggiunga la maggiore apertura che questi conseguentemente comportano, il maggiore aumento che possen ricever l'immagini senza scapito di vivacità , e la molto minor lunghezza che esige la macchina onde è resa tanto più maneggiabile , altri forse non dubiterà di concludere ad onta delle nostre osservazioni (561) che Nevvton , benchè allontanandosi dal divino modello , ha scoperto il vero segreto di accrescerne compiutamente la forza .

592. Il telescopio catadiottrico che egli inventò è semplicissimo . Nel fondo di un tubo chiuse un grande specchio concavo di metallo ΘΘ del semidiametro HR onde i raggi
71. lucidi provenienti dall'oggetto lontanissimo GG vi si andassero a riflettere; tra il fuoco principale F e lo specchio H collocò sull'asse HE in angolo semiretto uno specchio piano assai piccolo PP che ricevendo i raggi riflessi e nuovamente riflettendogli impedisse la loro riunione in F e la trasportasse in Φ ; e collocato sul nuovo asse NO un oculare convesso-convesso KK in modo che il fuoco stesso Φ di ΘΘ ne fosse il fuoco principale , la macchina fu compita . Da questa costruzione facilmente s'intende che la teorìa del telescopio Nevvtoniano è precisamente quella dell'astronomico ; poichè lo specchio PP non fa che cangiar direzione ai raggi e riunirgli alla distanza NΦ = NF (478) , onde tutti gli effetti che si hanno dal sistema delle due lenti VV , C'C'
70. (574 , 581) , debbono aversi in generale dallo specchio ΘΘ
e combinato con l'oculare KK , potendosi in questo come in
71. quello , raddrizzar l'immagine con l'aggiunta di nuovi oculari sotto KK (584). Supposto r il raggio di curvatura e della lente VV e dello specchio ΘΘ ; ed f' la distanza focale di C'C' e di KK , è chiaro che laddove la lunghezza del telescopio diottrico è $2r+f'$ se l'objettivo è piano-convesso , o almeno $r+f'$ se sia convesso-convesso (542) , quel-

la del *catadiottrico* è solamente HN cioè minore di HF = $\frac{r}{2}$ (486) e ciò ne rende comodissimo l'uso come già si os- 71.
servò (591) . Che se l'occhio situato di fianco non può sì facilmente trovar gli oggetti , si è rimediato a questa difficoltà o col situar lungo il tubo un secondo canocchiale diottrico , o con sostituire allo specchio piano PP un altro specchio tale che rimandi l'immagine verso il punto H (485) ove lo specchio primario ha un foro *mm* corrispondente alla grandezza di un'oculare che sola o congiunta ad altre (584) trasmette all'occhio o roversciata o diritta l'immagine dell'oggetto . Il telescopio così corretto dicesi *Gregoriano* assai più comodo del precedente .

593. Eppure non mancano anche quì dei gran difetti . Senza far conto dei raggi che si perdono per l'interposizione dello specchio PP , il che necessariamente indebolisce l'immagine : è certo che il pulimento accurato degli specchi concavi di metallo è di un'estrema difficoltà , che ottenuto con pena e con dispendio considerabile , è poi danneggiato prestissimo dall'umidità e dall'esalazioni , per cui nate quà e là delle macchie rugginose , lo specchio diventa affatto inabile all'uso ; infine che nella riflessione dei raggi sullo specchio metallico anche il meglio fatto , si perde sempre assai più di luce che nella rifrazione a traverso di un objettivo di vetro . Il nome di Nevvton impedì per un tempo di dare il giusto peso a tanti difetti , e quantunque i telescopj diottrici non andassero mai in disuso e si rimediasse in parte ai loro vizj coll'accrescerne la lunghezza , coll'impiccolir l'apertura degli objettivi e col distruggere i raggi inutili per mezzo di *diafragmi* traforati che ne ristringessero il fuoco ; pure vi volle un mezzo secolo per determinare gli Ottici a nuove ricerche e ricondurgli sul buon cammino (561) . Eulero considerata più seriamente la struttura dell'occhio (560) sostenne il primo che gli objettivi potean liberarsi dall'iridi e ne indicò la maniera ; Dollond perfezionò la teorìa e ci dette il primo i canocchiali *acromatici* o

FIG. senza colori. Basterà l'accennare i principali fondamenti di questa scoperta, giacchè la compiuta soluzion del problema eccederebbe i limiti che ci siamo prescritti.

594. Poichè dall'occhio si impara che per distrugger l'iridi vi vuole una lente composta, cioè la combinazione di più mezzi variamente densi e figurati (560), si pensò da principio a combinare il vetro coll'acqua: ma la poca diversità delle lor potenze rifrattive esigendo una curvatura troppo ardita nelle lenti e rendendo perciò molto sensibili le aberrazioni di sfericità, si passò a far prova del flint e da lui dopo qualche travaglio, si ottenne compiutamente l'intento. Il primo tentativo fu di applicare alla base CG di
72. un prisma BCG di flint il vertice C di un prisma tale CBA di vetro, che il raggio emergente dai due prismi fosse parallelo all'incidente. Questa ricerca era molto importante, attesa una celebre esperienza di Nevvton, ove era detto che il raggio in tal caso esce sempre senza colori; onde inferivano gli Ottici che sussistendo quell'esperienza, non si sarebbe mai potuta correggere l'aberrazione di refrangibilità. Già si comprende che i due prismi ACB, CBG rappresentano un semi-objettivo convesso-concavo, e che raddoppiati danno un solido da cui è facile di ricavare un intero objettivo o menisco composto, in cui la lente concavo-concava GCBIEB di flint si unisce esattamente con la convesso-convessa CBEA di vetro. Dato pertanto ad arbitrio l'angolo rifrangente CBG del prisma di flint, si cerca quale debba essere l'angolo rifrangente ACB del prisma di vetro onde il raggio che cade normale sulla faccia AC (come cade appunto sugli objettivi dei canocchiali), ad onta della refrazione per i due prismi, si trovi parallelo al raggio emergente dalla faccia BG. Ecco in qual guisa noi anderemo alla soluzione di questo problema.

595. Sia il dato angolo CBG $= 23^\circ, 40' = b$, il cercato ACB $= x$; e poichè per ipotesi il raggio cade normalmente in AC, sarà $i = 0$, $r = 0$ (439) ed $i' = x$ (L. 660): ma il raggio

raggio passa dal vetro nel flint; dunque $sen\ r' = \frac{310\ sen\ i'}{316}$ (518) $= \frac{310\ sen\ x}{316}$ e $cos\ r' = \frac{2}{310} \sqrt{(158^2 - 155^2\ sen^2\ x)}$ (L. 696). Supposto pertanto che x superi b di qualche grado onde possa darsi alla lente la necessaria curvatura l'angolo r' di refrazione nel flint, poco più piccolo dell'angolo $i = x$ d'incidenza (439), ci darà $b < r'$ e quindi $i'' = r' - b$ (L. 660); onde passando il raggio dal flint nell'aria, avremo $sen\ r'' = \frac{316\ sen\ i''}{200}$ (512) $= \frac{316\ sen\ (r' - b)}{200} = \frac{316}{200}(sen\ r' \times cos\ b - sen\ b\ cos\ r') = \frac{31\ sen\ x\ cos\ b}{20} - \frac{sen\ b}{100} \sqrt{(158^2 - 155^2\ sen^2\ x)}$; ma l'espressione generale dell'angolo fatto dai raggi incidente ed emergente nel caso di $b < r'$ è $b - x + r''$ (L. 659) e questi raggi debbono essere per ipotesi paralleli, onde $b - x + r'' = 0$; dunque $sen\ r'' = sen\ (x - b) = sen\ x\ cos\ b - sen\ b\ cos\ x = \frac{31\ sen\ x\ cos\ b}{20} - \frac{sen\ b}{100} \sqrt{(158^2 - 155^2\ sen^2\ x)}$ cioè $11\ sen\ x - \frac{tang\ b}{5} \sqrt{(158^2 - 155^2\ sen^2 x)} = -20\ tang\ b\ cos\ x$, ed infine $tang\ b = tang\ 23^\circ, 40' = \frac{55\ sen\ x}{\sqrt{(158^2 - 155^2\ sen^2\ x)} - 100\ cos\ x}$, equazione che convien risolvere col solito metodo della doppia falsa posizione. Fatto perciò $L. \sqrt{(158^2 - 155^2\ sen^2\ x)} = \ldots\ldots \frac{L(158 - 155\ sen\ x) + L(158 + 155\ sen\ x)}{2} = Lm$, e $L\ 100\ cos\ x = L\ 100 + L\ cos\ x = Ln$, si avrà $L\ tang\ 23^\circ, 40' = L\ 55 + L\ sen\ x - L\ (m - n)$, in cui se si ponga $x = 25^\circ$, il primo errore sarà $-0,0009396$, e se si ponga $x = 30^\circ$, il secondo sarà $+0,0893345$, dal che si ricaverà $x = 25^\circ, 2', 48''$ che preso per nuova posizione, darà l'errore $-0,0000184$, onde più prossimamente $x = 25^\circ, 2', 51''$, che nuovamente preso per posizione, dà l'errore $-0,0000213$, e quindi finalmente $x = 25^\circ, 2', 55''$.

596. Dico ora che uniti contrariamente due prismi, l'uno di vetro dell'angolo rifrangente $x = 25^\circ, 2', 55''$ e l'altro di flint dell'angolo $b = 23^\circ, 40'$, il raggio emergente da essi sarà parallelo all'incidente. In fatti $i' = x = 25^\circ$,

$2', 55''$; $sen\ r' = \frac{310\ sen\ 25°,\ 2',\ 55''}{316}$ ed $r' = 24°, 32', 28''$; $b = 23°, 40'$; $i'' = r' - b = 0°, 52', 28''$; $sen\ r'' = \ldots \frac{316\ sen\ 0°,\ 52',\ 28''}{200}$ ed $r'' = 1°, 22', 54''$; dunque $b - x + r''$ (L. 659.) $= 0°, 0', 1''$, angolo affatto insensibile; dunque i raggi son paralleli come si richiedeva.

597. Resta ora ad esaminare se veramente il raggio esca bianco dai due prismi come Newton ha preteso. Perchè questo succeda è necessario che l' angolo di dispersione sia lo stesso o poco diverso in ciascuno dei due prismi, onde l' effetto della refrazione essendo in essi eguale, e per la loro opposta situazione anche contrario, i raggi emergenti di ciascuna specie non se ne risentano e l' intero raggio si mostri senza colori. Nel prisma di vetro abbiamo $r = 0$ ed $i' = x = 25°, 2', 55''$ (596), e perciò quando il raggio esce nell' aria, $sen\ r' = \frac{31\ sen\ 25°,\ 2',\ 55''}{20}$ (509) ed $r' = 41°, 0', 52''$; dunque (529) l' angolo di dispersione $d = \frac{2\ sen\ 25°,\ 2',\ 55''}{100\ cos\ 41°,\ 0',\ 52''} = 0°, 38', 35''$. Ma nel prisma di flint ove $b = 23°, 40'$, supposto che il raggio lo penetri sotto l' angolo d' incidenza $i\ (= r'') = 1°, 22'. 54''$ (596) si avrà $r\ (= i'') = 0°, 52', 28''$ (596), $i'\ (= r') = 24°, 32', 28''$ (596) e si troverà $r' = 41°, 0', 52''$ (512); dunque (529) $d = \ldots \frac{3\ sen\ 23°,\ 40'}{100\ cos\ 41°,\ 0',\ 52''.\ cos\ 0°,\ 52',\ 28''} = 0°, 54', 52''$. Dunque la differenza dei due angoli di dispersione che secondo Newton dovrebbe essere o piccolissima o zero, si trova quì $54', 52'' - 38', 35'' = 16', 17''$ assai grande perchè il raggio emergente produca nell' occhio la sensazione dei colori prismatici: cioè la potenza dispersiva del prisma di flint non solo distrugge la separazione dei raggi prodotta dal prisma di vetro, ma ne genera anche una nuova in contrario sotto un angolo di $16', 17''$. In tal guisa l' esperienza di Newton riguardata come un insuperabile ostacolo alla perfezione dei canocchiali, fu convinta di falsità, e Dollond ad onta della fiducia con cui l' aveva opposta ai raziocinj d' Eu-

FIG.

lero, dovè convenire che anche Newton era un uomo.

598. Ora nulla è più facile che il trovar due prismi l' uno di vetro e l' altro di flint, che situati al solito contrariamente, facciano emergere un raggio senza colori; tali sono quelli che hanno gli angoli rifrangenti l' uno di 30°, l' altro di 19°, in cui il raggio normalmente incidente fa con l' emergente un angolo di $5°, 31', 47''$, e non son perciò paralleli, mentre la differenza degli angoli di dispersione è di soli $23''$ e perciò insensibile. Ma poichè due soli prismi danno un objettivo o menisco convesso-concavo (594) che per lo più allunga il canocchiale (545); e distrutta una volta l' aberrazione di rifrangibilità da cui rendevasi necessario l' allungamento (593), queste macchine crescon di pregio col diminuir di lunghezza; gli Ottici si rivolsero ben presto agli objettivi convesso-convessi, e a somiglianza della lente composta dell' occhio, la quale risulta principalmente dalla combinazione dei tre umori aqueo, cristallino e vitreo, il primo e l' ultimo pochissimo differenti (560), pensarono di unire ai due prismi ACB di vetro e CBG di flint un 72.
terzo prisma BGH parimente di vetro, ma tale che correggendo l' eccesso della potenza dispersiva del flint (597), facesse emergere il raggio senza colori: nuovo problema in cui dati gli angoli ACB,CBG, si tratta di determinar l' angolo BGH del nuovo prisma oppostamente situato, onde si abbia il richiesto effetto.

599. Serviamoci per brevità degli angoli già fissati di sopra (595, 596), e sia $ACB = a = 25°, 2', 55''$, $CBG = b = 23°, 40'$, $BGH = x$. L' angolo d' incidenza con cui il raggio passa dal flint nel terzo prisma di vetro sarà dunque $i'' = 0°, 52', 28''$ (596) e perciò $sen\ r'' = \frac{316\ sen\ 0°,\ 52'.\ 28''}{310}$ (518) ed $r'' = 0°, 53', 29''$: ma nel prisma di flint si avea $b < r'$; dunque (L. 659) nel prisma di vetro il raggio è al disopra della normale, e quindi (L. 660) $x > r''$ ed $i''' = x + r''$; dunque poichè dal vetro passa il raggio nell' aria, sarà $sen\ (x + r'') : sen\ r''' :: 20 : 31$ (509) e $sen\ r''' = \ldots \frac{31\ sen\ (x + r'')}{20}$. Supposto pertanto scambievolmente che un

raggio passi dall' aria nell' ultimo prisma di vetro sotto un angolo d' incidenza $i = r'''$, si avrà $r\ (= i''') = x + r'' = x + 0°, 53', 29''$, $i'\ (= r'') = 0°, 53', 29''$, ed uscendo il raggio dal vetro nell' aria sarà $sen\ r' = \frac{31\ sen\ 0°, 53', 29''}{20}$ ed $r' = 1°, 22', 54''$; dunque $d = \frac{2\ sen\ x}{100.\ cos\ (x + r'').\ cos\ r'} = tang\ 16', 17'' = tang\ f$, giacchè per ipotesi si vuol distrugger l' aberrazione che si trovò di sopra (597). Riducendo l' equazione, si avrà $sen\ x = 50\ tang\ f\ cos\ r'\ (cos\ x\ cos\ r'' - sen\ x\ sen\ r'')$, dipoi $tang\ x = 50\ tang\ f\ cos\ r' cos\ r'' - 50\ tang\ f \times cos\ r'\ sen\ r'' tang\ x$, onde infine $tang\ x = \frac{50\ tang\ f\ cos\ r'\ cos\ r''}{1 + 50\ tang\ f\ cos\ r'\ sen\ r''}$ $= \frac{50.\ tang\ 16', 17''.\ cos\ 1°, 22', 54''.\ cos\ 0°, 53', 29''}{1 + 50\ tang\ 16', 17''.\ cos\ 1°, 22', 54''.\ sen\ 0°, 53', 29''} = tang\ 13°, 16', 17''$; dunque se ai primi due si unisca contrariamente un terzo prisma di vetro il cui angolo rifrangente sia $13°, 16', 17''$, l' aberrazione di rifrangibilità sarà distrutta. In fatti poichè $i'' = 0°, 52', 28''$, $r'' = 0°, 53', 29''$, e $13°, 16', 17'' > 0°, 53', 29''$, sarà $i''' = 14°, 9', 46''$ (L. 660): ma $r''' = 22°, 17', 14''$ perchè $sen\ r''' = \frac{31\ sen\ 14°, 9', 46''}{20}$; dunque $d = \frac{2\ sen\ 13°, 16', 17''}{100.\ cos\ 14°, 9', 46''.\ cos\ 1°, 22', 54''} = 16', 17''$.

600. Tali sono i fondamenti su cui si intraprese la costruzione dei nuovi objettivi composti, nei quali il semidiametro delle tre lenti è talmente proporzionato che non solo svaniscono i colori, ma diviene anche insensibile lo spazio di diffusione, e l' immagine estrema e principale coincidono, cosicchè la stessa lente abolisce del pari l' aberrazione e di rifrangibilità e di sfericità: il rimedio medesimo si è poi esteso anche agli oculari, e un canocchiale corredato di tali vetri giustamente può chiamarsi perfetto, come appunto si è dato il nome di *perfette* a quelle lenti. Per altro vi è luogo tuttora a maggior perfezione, giacchè le lenti di Dollond non son tanto simili a quella dell' occhio, che non possa sperarsi un' imitazione ancor più esatta: il nostro cristallino è doppiamente convesso (560), ma la lente di

flint che lo rappresenta, è doppiamente concava; gli umori aqueo e vitreo che circondano il cristallino, differiscono pur qualche poco tra loro in densità (560), ma le due lenti che chiudono il flint, son precisamente d' una sostanza e densità medesima; infine la cornea è anch' essa un mezzo da tutti gli altri diverso e diversamente rifrangente, a cui nulla vi è di simile nelle nuove lenti acromatiche. Sembra in fatti deciso dall' esperienze più delicate che la combinazione di due sostanze diafane, come del vetro e del flint, non richiama ad uno stesso fuoco tutti i colori, ma solamente due; che la combinazione di tre sostanze, come del vetro, del flint e dello *strass* (altra specie di cristallo più dispersiva del flint) ne richiama tre ec., onde avendosi nell' occhio quattro diverse sostanze, debbono unirsi ad un fuoco medesimo quattro almeno dei sette colori, il che produce un acromatismo incomparabilmente più accurato del Dollondiano, ove non si hanno che due sostanze diversamente rifrangenti.

601. I telescopj astronomici o di refrazione o di riflessione ordinariamente si muniscono d' un *micrometro*, macchinetta che serve a misurare gli apparenti diametri del Sole e dei Pianeti, la differenza delle ascensioni rette e delle declinazioni di due astri ec. Si hanno molte specie di micrometri, ma due sono le più comuni: 1°. sopra un piccolo telajo immobile presso all' oculare si tendono orizzontalmente uno o più fili tenuissimi di seta che attraversano un simil filo verticale, e per mezzo di una lunga vite si fa salire e discendere parallelamente al primo filo orizzontale un simil filo detto il *cursore* finchè l' uno occulti all' occhio l' altro; il movimento del cursore esattamente riportato sopra una mostra divisa in 100 o più parti, determina la dimensione apparente del dato oggetto: 2°. tagliato in mezzo l' objettivo in *mn*, se con 73.
un meccanismo adattato se ne allontanino parallelamente a se stessi i due segmenti *mo*, *on* si formeranno due immagini separate *df*, *fb* dello stesso oggetto BD. Condottesi dunque al contatto le loro opposte estremità come in *f*, e co-

FIG. nosciuto con esattezza l'allontanamento a dei due centri delle semilenti, se l'oggetto è molto distante, sarà BfD il suo
73. diametro d angolare, e si avrà $Of = f$ onde $Of\ (f) : on\ \left(\frac{a}{2}\right) :: 1 : tang\,\frac{d}{2} = \frac{a}{2f}$, ovvero per esser gli angoli molto piccoli, $d = \frac{a}{f}$; e quindi per esser f costante, conosciuta la dimensione angolare di un corpo, si ha quella di tutti gli altri.

Se BD sia un oggetto vicino, e sia f il suo fuoco ed F il fuoco principale, si avrà (538. 4°.) $fO : f\Phi$ (ovvero per i triangoli simili, mn : BD) :: FO : Oφ :: $f : y$, onde $\frac{mn}{f} = \frac{BD}{y}$; e l'angolo sotteso da BD in O sarà eguale all'angolo sotteso da mn in F cioè darà come prima la misura angolare dell'oggetto (L. 555).

Questo micrometro dicesi anche *Eliometro*, *Astrometro* e *Micrometro objettivo*; egli non è sottoposto a molti dei difetti del primo, ed è di un uso più universale, benchè esiga gran delicatezza e cautela.

Microscopio.

602. Come l'occhio inerme non distingue i lontanissimi oggetti quantunque grandi, così non giunge a scoprire le minime parti degli oggetti piccolissimi benchè vicini; e come per avvalorarlo nel primo caso si immaginarono i canocchiali, così per soccorrerlo nel secondo fu trovata una nuova macchina che dal suo effetto si chiamò *Microscopio*. Tale è qualunque lente convessa se la sua distanza y dall' oggetto eguagli la principal lunghezza focale f; poichè con ciò la visione per l'occhio sano o presbita è distinta (dovendo il miope avvicinar qualche poco l'oggetto alla lente per ottener l'opportuna divergenza dei raggi (538)) e attesa l'analogìa $a : b :: f : e + f$ (571), l'oggetto è manifestamente ingrandito: ma trattandosi quì di veder con distinzione le parti più piccole dei minutissimi insetti, delle polveri, dei peli, dei sali ec., bisogna dare all'immagine il mas-

simo aumento possibile, sempre però dentro i limiti a cui costringono le solite aberrazioni (589) se la lente non sia acromatica. Ora l'equazione $b = \frac{a(e+f)}{f}$ dimostra che l'immagine b è tanto più grande, quanto f è più piccola (L. 48), e supposte eguali le convessità della lente, tanto è più piccola f quanto è minore il raggio di sfericità (542), il quale tanto più scema quanto più crescono le curvature (L. 596); dunque l'ingrandimento dell'immagine sarà tanto più considerabile quanto è minore la sfera a cui la lente appartiene. Ecco però una difficoltà: giacchè la lente dee esser piccolissima e però svanisce il campo a misura che l'occhio se ne allontana, converrà dunque accostarvelo quanto più si può e fare $e = 0$: ma in tal caso l'equazione $b = \frac{a(e+f)}{f}$ diventa $b = a$; dunque si avrà l'immagine eguale all'oggetto mentre si voleva prodigiosamente ingrandita. Si osservi però che tra l'oggetto e l'immagine vi è questa gran differenza, che laddove l'uno a sì piccola distanza si vedrebbe confusissimamente, attesa la troppa divergenza dei raggi, l'altra per l'interposizion della macchina si vede con la massima distinzione, e l'oggetto per l'occhio armato non è più ove è realmente, ma è ove l'occhio inerme potrebbe distintamente vederlo: cosicchè se la distanza dell' oggetto dall' occhio armato sia $d' = 0{,}02^{\textit{poll.}} = f$ (perchè $e = 0$), e la distanza da cui l'occhio nudo lo vedrebbe distintamente sia $d = 8^{\textit{poll.}}$ (585), giacchè l'oggetto ne' due casi è lo stesso, si avrà (452) $a : b :: d' : d :: 0{,}02 : 8 :: 1 : 400$, cioè presa una lente la cui principal lunghezza focale sia $\frac{1}{50}$ di pollice, l'immagine comparirà 400 volte maggior dell' oggetto. Tale è la forza di questo microscopio, e consistendo egli in una sola lente, dicesi *semplice*: la necessità di avvicinargli quanto più si può l'occhio da una parte e l'oggetto dall' altra, lo rese in molte occasioni impraticabile e fece inventare il microscopio *composto*. FIG. 70.

603. Sia dunque O' il fuoco principale della piccola len-

FIG. te convesso-convessa C′C′ che ora diviene objettiva. Ad una
70. distanza poco maggiore di pO' cioè in f' si collochi il piccolo oggetto da osservarsi, e si faccia che il punto F ove se ne forma l'immagine sia il fuoco principale dell'oculare VV, onde i raggi emergano paralleli (571). L'immagine si vedrà distinta e ingrandita, e il suo aumento angolare sarà $m' = \frac{x x' (y + e)}{y y' k}$ (585), cioè per essere $x = \frac{fy}{y - f}$ (538), $x' = k$, $y' = f'$ ed $y + e = 8^{poll.}$ (585) si avrà $m' = \frac{8 f}{(y - f) f'}$.
Così se sia $f = 0,02^{poll.}$, $f' = 0,04$, $y = 0,021$, si troverà $m' = 4000$. Collo stesso metodo si troverebbe m'', m''' ec. per un maggior numero di lenti.

604. Su questo stesso principio è costruito il *Microscopio solare*. In F poco lungi dal fuoco principale φ di una piccola lente C′C′ convesso-convessa si adatta sopra una laminetta piana di vetro l'oggetto da ingrandirsi e contro di lui si dirige un gran raggio Eφ di luce viva, che attraversando la laminetta e la lente, porterà l'immagine perfettamente distinta e smisuratamente ingrandita sopra una carta bianca verticalmente inalzata alla distanza focale pR. Infatti se sia al solito F$p = y$, e $\varphi p = f$, sarà al solito $p\mathrm{R} = x = \frac{fy}{y - f}$, ed $i = \frac{a x}{y} = \frac{a f}{y - f}$ (585). Così se $f = 6^{lin.}$, $y = 6,001$, si avrà $a : i :: 0,001 : 6 :: 1 : 6000$.

Per altro con questo metodo non si hanno immagini che dai corpi diafani, e queste anche imperfette: poichè i raggi che gli attraversano ancorchè non vi si refrangano sensibilmente, contraggon però i differenti colori delle parti e interne ed esterne degli oggetti, e forman sotto un istesso contorno una pittura confusa di tutte insieme e perciò molto inesatta: quindi seppur non si debba necessariamente osservarne l'interno, sarà molto meglio diriger con qualche specchio o con qualche lente la luce sulla faccia anteriore di ciò che ha da osservarsi: la pittura ne è allora e più decisa e più viva.

Alla

Alla teorìa del microscopio solare facilmente riduconsi gli effetti di varie altre macchine ottiche, come della *Camera oscura*, della *Lanterna magica*, del *Polemoscopio* ec.; la descrizione che potremmo darne riuscirebbe troppo oscura per chi non le ha mai vedute, e affatto superflua per chi se ne è già formata un'idea: basti dunque di avere stabiliti i fondamenti per intenderne e calcolarne la forza.

605. Aggiungeremo alcuni Problemi ottici per esercizio degli studiosi ed applicazione delle teorìe.

I. Data la distanza a, di due corpi lucidi di egual chiarezza, determinare il luogo ove essi producono il massimo o minimo lume. *Ris.* Il minimo lume sarà alla distanza $x = \frac{a}{2}$.

II. Sciogliere lo stesso problema supposta $a = 8$ e le chiarezze $l = 1$, $\lambda = \frac{1}{8}$. *Ris.* Il minimo è $x = 5\,\frac{1}{3}$.

III. Dovendosi illuminare una lunga strada in modo che la chiarezza dei lumi nella metà del loro intervallo non sia minore di l, cercasi se sarà più economico il collocar dei lampioni di una forza di luce f agl'intervalli $2d$, oppure degli altri di una maggior forza a maggiori intervalli. *Ris.* Posto l'aumento delle forze di luce $:: n : m$ e chiamando x la metà del maggiore intervallo ed s, s' le spese occorrenti, si troverà $x = d\sqrt{\frac{m}{n}}$ ed $s : s' :: 1 : \sqrt{\frac{m}{n}}$, onde il secondo genere di lampioni è a scapito se anche le spese crescono $:: n : m$.

IV. Un piccolo oggetto è fissato orizzontalmente ad una distanza b dal muro a cui dee sospendersi un lume. Si cerca l'altezzza del lume più vantaggiosa per illuminar l'oggetto il più che si può. *Ris.* Chiamata x l'altezza perpendicolare del lume sul piano ove è l'oggetto e z l'altezza angolare presa dal centro dell'oggetto, sarà $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$ e $z = 35°, 15', 52''$.

V. Supposto che una sfera lucida CVD del raggio t il- 54.
lumini un piano assai piccolo HF, e che i raggi emanati

R s

FIG. sopra HF dai punti C, V, D ec. abbiano la stessa forza,
54. qualunque sia la direzione colla quale parton dal corpo lucido, nè s' indeboliscano se non in ragion dei coseni degli angoli d' incidenza CHG, DHG ec., e in ragione inversa dei quadrati delle distanze CH, VH ec., si cerca la quantità dell' illuminazion perpendicolare prodotta sul punto H dal segmento lucido CVD, posto che HF sia normale a GH. *Ris.* Chiamata b la distanza GH, y l' illuminazione cercata, ed $1 : \pi$ la ragion del diametro alla circonferenza, si troverà $y = \frac{2\pi l^2}{b^2}$.

VI. Determinare la stessa cosa in supposizione che la luce debba considerarsi come vibrata dal circolo steso per CD e che la sua forza dipenda non solamente dall' angolo d' incidenza e dal quadrato della distanza, ma ancora dall' angolo di *emersione* fatto dal raggio vibrato col piano raggiante. *Ris.* $y = \frac{\pi l^2}{b^2}$.

VII. A un certo grado di luce un occhio anche sano perde la visione distinta di un corpo isolato il cui diametro è di 18 pollici, nella distanza di 350. tese. Può egli dedursi da una tale esperienza il valore della chiarezza o densità della luce in cui è immerso l' oggetto? *Ris.* La chiarezza cercata sarà alla chiarezza ordinaria del giorno :: 0,00007225 : 1.

VIII. Da una stessa parte dell' asse ottico IH son collo-
53. cati tre oggetti L, B′, Z di differenti larghezze a, b, c con gli intervalli m tra il primo e il secondo, ed n tra il primo e il terzo. Cerco un punto I ove collocato l' occhio gli vegga tutti di egual grandezza. *Ris.* Chiamata φ la distanza HL tra il primo oggetto e la normale condotta dal punto cercato I sulla linea degli oggetti, ed ω la distanza HI, si troverà 1°. $\varphi = \ldots$

$$\frac{(b+m)(c+n)(n-m)-(a+n)(a+m)(c+n-b-m)}{2(a+m)(c+n)-2(a+n)(b+m)} - \frac{a}{2} \text{ ed } \omega = \sqrt{\left(\frac{a(a+m)(a+n)(c+n-b-m)}{(a+m)(c+n)-(a+n)(b+m)} - \varphi^2\right)}.$$

IX. Mosso un corpo per una retta qualunque uniforme-

mente, e conosciuti i tempi t, t' in cui passa dal primo punto di essa a un secondo e a un terzo con gli angoli visuali corrispondenti a, b determinar l' angolo x fatto dalla direzione del moto coll' asse ottico che passa per il primo dei tre punti osservati. *Ris.* $\tang x = \ldots$ $\frac{(t'-t)\tang a \tang b}{t' \tang a - t \tang b}$. FIG.

X. Data l' altezza g di una statua da collocarsi nella facciata di un edifizio, si cerca 1°. a quale altezza x debba situarsi perchè uno Spettatore in terra alla distanza orizzontale b dalla facciata vegga la statua della grandezza ordinaria c o sotto un angolo dato a; 2°. e in caso che sia data l' altezza x determinar la distanza a cui dee porsi lo Spettatore per ottener quest' apparenza c o a. *Ris.* 1°. $x = -\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(g^2 + 4b^2\left(\frac{g-c}{c}\right)\right)}$ ovvero $x = -\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(g^2 + 4b\left(\frac{g - b \tang a}{\tang a}\right)\right)}$: 2°. $b = \sqrt{\left(cx\left(\frac{g+x}{g-c}\right)\right)}$ ovvero $b = \frac{g + \sqrt{(g^2 - 4\tang^2 a(gx + x^2))}}{2 \tang a}$.

XI. Uniti sulla medesima linea LK due oggetti LF, FK di eguali o ineguali grandezze a, b, si domanda un punto o una 53.
serie di punti I da cui compariscano eguali. *Ris.* Condotta D′I $= y$ normale alla linea data e fatta LD′ $= x = z + \frac{a^2}{a-b}$, si avrà $y^2 = \left(\frac{ab}{a-b}\right)^2 - z^2$ equazione al circolo del raggio $r = \frac{ab}{a-b}$ ove se $a = b$. sarà $r = \infty$ e il luogo cercato una retta indeterminata che passa per F normale ad LK.

XII. Collocati sul piano AB′C′E due oggetti B, C, trattasi di disporne altri infiniti di quà e di là in modo che l' occhio P situato alla distanza PI $= a$ dal piano, gli vegga in due ordini paralleli tra loro ed alla retta DI $= b$ normale a BC. *Ris.* Gli oggetti debbono collocarsi nei perimetri di due iperbole.

XIII. Dato sull' orizzonte ENC l' angolo RNC $= i$ in fac- 75.
cia ad un corpo lucido sublime, suppongo che l' ombra EN $= d$ di un corpo verticale GE $= a$ si pieghi in NR per una

FIG lunghezza g, e cerco l'altezza x del corpo lucido sull' orizzonte. *Ris.* $\tang x = \frac{a - g \sen i}{d + g \cos i}$.

XIV. Data la lunghezza $MO = l$ di uno specchio piano
56. e dato il punto Φ dell' occhio colle distanze ΦG, GO, si cerca di collocare un oggetto $CD = g$ in una situazion parallela allo specchio, tale che colla sua immagine lo occupi esattamente da parte a parte. *Ris.* Supposta $\Phi G = b$ e chiamata y la distanza dell' oggetto dal piano dello specchio, si troverà $y = \frac{b(g-l)}{l}$ e di quì tutto il resto.

XV. In faccia a uno specchio concavo di un raggio $r = 8$ *pollici* dee collocarsi un oggetto la cui superficie è 144 *pollici quadri*, in modo che la sua immagine acquisti un' ampiezza 16 volte maggiore. Cercasi la distanza x a cui l' oggetto dee collocarsi. *Ris.* $x = 5$ *poll.*

XVI. Dato in un mezzo diafano parallelepipedo come $QI\Phi$
64. un punto μ, e dato fuori di esso un punto lucido f, trovare il raggio fQ che refratto passi per μ. *Ris.* Condotto per f l' asse $f\Phi$ e date $fN = 5$, $NC = \sqrt{\frac{15}{2}}$ e $C\mu = 2$, si avrà $NQ = x = 3$ e l' incidenza del raggio cercato $= NfQ = 30°, 57', 50''$.

XVII. Dato un corpo sferico opaco cinto da un' atmosfera concentrica di trasparenza uniforme il cui raggio è a quello del corpo opaco $:: n : m ::$ 40605 : 19509, determinar quei due raggi che cadendo paralleli e con eguale incidenza sull' atmosfera, forman tra loro dopo le due refrazioni il minimo angolo z, supposta l' incidenza alla refrazione $:: n : 1 ::$ 250 : 187. *Ris.* I due raggi son tangenti al corpo opaco e $z = 45°$.

XVIII. Sopra una sfera diafana cade un raggio BM pa-
66. rallelo all' asse che forma l' angolo d' incidenza i. Determinare per mezzo di i l' arco $QR = z$ intercetto fra l' asse e il raggio refratto, supposta al solito $n : 1$ la ragion dei seni d' incidenza e di refrazione. *Ris.* $\sen z = \frac{\sen 2i \sqrt{(n^2 - \sen^2 i)} - \sen i (n^2 - 2 \sen^2 i)}{n^2}$.

XIX. Data un' ellissoide di vetro, tale che gli assi dell' ellisse generatrice stiano tra loro in ragion di $3 : \sqrt{5}$, trovare il fuoco dei raggi che vengono paralleli all' asse, determinar l' ampiezza di questo fuoco, e nel caso che egli cada dentro l' ellisse, assegnare il metodo di tagliarne una tal parte onde il fuoco rimanga nell' aria libera senza alterazione. *Ris.* Il fuoco cercato è il fuoco medesimo dell' ellisse, quello che è più lontano dall' origine dei raggi; l' ampiezza del fuoco è nulla; e se dalla parte opposta all' incidenza si formi una cavità sferica che abbia il centro nel fuoco stesso, potrà tagliarsi il rimanente dell' ellissoide, e il menisco residuo darà il fuoco senza alterazione nell' aria libera.

XX. Si ha da costruire una lente di vetro piano-convessa iperbolica, colla quale i raggi paralleli all' asse si riuniscano esattamente nel fuoco dell' iperboloide opposta: cerco la ragione dei semi-assi a, b dell' iperbola generatrice. *Ris.* $a^2 : b^2 :: 4 : 5$.

XXI. Un miope distingue bene un oggetto alla distanza di quattro pollici e mezzo. Cerco per esso una lente concavo-concava o piano-concava, onde distingua perfettamente anche gli oggetti lontani. *Ris.* Chiamato r il raggio di curvatura della lente cercata si avrà, se è piano-concava, $r = 27^{lin}$, se concavo-concava isoscele, $r = 54^{lin}$.

XXII Un presbita vede distintamente un oggetto piccolo allorchè è lontano dall' occhio due piedi e mezzo. Vi chiede una lente adattata a legger senza fatica alla distanza ordinaria di 7. pollici e mezzo. *Ris.* Il raggio r di curvatura sarà per la lente cercata $= 5^{poll}$ se è piano-convessa, ovvero $= 10^{poll}$ se è convesso-convessa isoscele.

XXIII. Posto che l' apparente grandezza della Luna sia $= 32'$ in circa, qual grandezza avrà in un canocchiale astronomico che porta un objettivo piano-convesso di un raggio $r = 50$ *piedi* ed un oculare isoscele del raggio $r' = 1$

FIG.

pollice e mezzo. *Ris.* La grandezza dell' immagine sarà 800 volte più grande.

XXIV. Determinar l' aberrazione di sfericità in una lente piano-convessa di flint il cui arco massimo è 8° con un raggio di 60 *piedi*. *Ris.* Chiamato $2x$ il diametro dell' aberrazione cercata, si ha $2x = \frac{1}{14925}$ di linea.

72. XXV. Supposto l'angolo rifrangente CBG di un prisma di flint $= 27°, 30'$, determinare un tal angolo rifrangente ACB di un prisma di vetro, che il raggio normale sopra CA esca da BG parallelo dopo le due refrazioni. *Ris.* L' angolo ACB è di $29°, 8', 51''$.

70. XXVI. Date le distanze focali principali f, f' di due lenti convesse VV, C'C' e data la distanza E$u = a$ di un piccolo oggetto dalla prima lente, cerco la distanza $up = d$ delle due lenti, tale che l' immagine si dipinga in una parete alla distanza pR$= h$. *Ris.* $d = x + y' = \frac{af}{a-f} + \frac{hf'}{h-f'}$.

Fine dell' Ottica.